



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Beregning af jernbetonbjælker

I - statisk tilladelige spændinger og kræfter

Rathkjen, Arne

Publication date:
1991

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Rathkjen, A. (1991). *Beregning af jernbetonbjælker: I - statisk tilladelige spændinger og kræfter*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. R/ Bind R9123

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

TEAM 1991.1

A. RATHKJEN
BEREGNING AF JERNBETONBJÆLKER
I - STATISK TILLADELIGE SPÆNDINGER OG KRÆFTER
JUNI 1991

ISSN 0902-7513 R9123

THE HISTORY OF THE CITY OF BOSTON

FROM THE FIRST SETTLEMENT
TO THE PRESENT TIME

BY
NATHANIEL BENTLEY

VOLUME I.

BOSTON:
PUBLISHED BY
J. B. LEECH, 1854.

NEW-YORK:
PUBLISHED BY
J. B. LEECH, 1854.

PHILADELPHIA:
PUBLISHED BY
J. B. LEECH, 1854.

CHICAGO:
PUBLISHED BY
J. B. LEECH, 1854.

ST. LOUIS:
PUBLISHED BY
J. B. LEECH, 1854.

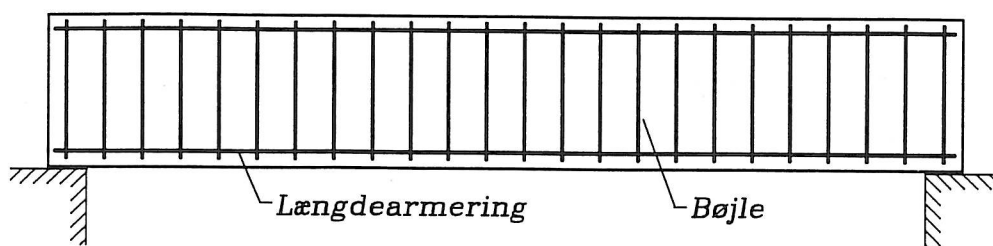
ST. PAUL:
PUBLISHED BY
J. B. LEECH, 1854.

MINNEAPOLIS:
PUBLISHED BY
J. B. LEECH, 1854.

PORTLAND:
PUBLISHED BY
J. B. LEECH, 1854.

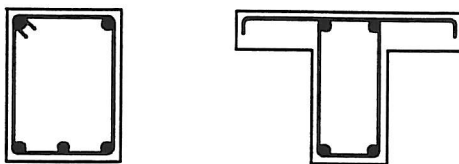
1. Indledning

Da uarmeret betons evne til at optage trækspændinger er særdeles ringe, vil man oftest udnytte betonens forholdsvis store strykstyrke ved at benytte jernbetonkonstruktioner.



Figur 1.1

Figur 1.1 viser en jernbetonbjælke forsynet med såvel længdearmering som en tværarmering bestående af bøjler. For nogle typiske bjælketsværsnit er bøjlernes udformning vist i figur 1.2.

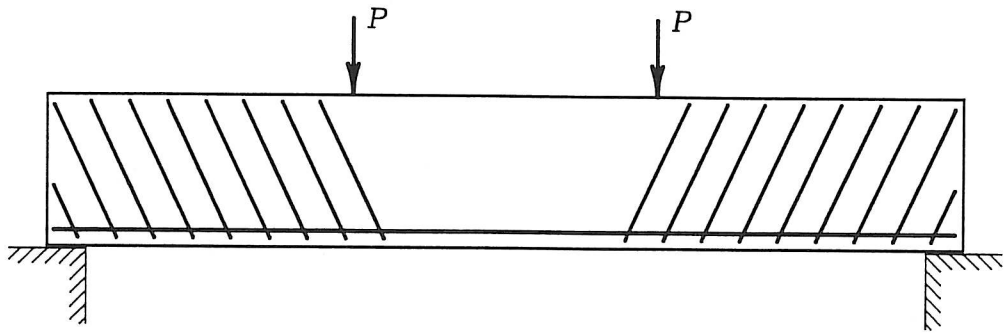


Figur 1.2

Både længdearmering og bøjler fremstilles af armeringsstænger af stål. Om en vilkårlig armeringsstang antages, at der kun optræder spændinger i stangens længderetning. Om betonen antages, at den ikke kan optage træk, så der kun optræder enakset tryk.

Dimensionering af en jernbetonbjælke, dvs. bestemmelse af betondimensioner og armeringsmængder, foregår efter nedreværdiprincippet. Ifølge nedreværdisætningen er en last, som svarer til en spændingstilstand, som er både statisk tilladelig og sikker, mindre end eller lig med konstruktionens bæreevne. Opgaven løses ved, at man først bestemmer en statisk tilladelig spændingstilstand, som svarer til den last, bjælken er påvirket af, og derefter gøres spændingstilstanden sikker ved, at man vælger passende betondimensioner og armeringsmængder.

Til bestemmelse af spændingstilstanden i en bjælke opdeles denne i 3 områder, jvf. figur 1.3, et område omkring momentmaksimum, et område omkring understøtningen og et område mellem understøtning og momentmaksimum. Det sidstnævnte område kaldes forskydningszonen, og i dette område er det forskydningskraften, som bestemmer bøjlearmeringsmængden. Længdearmeringen bestemmes af det maksimale moment og kan eventuelt reduceres i forskydningszonen, mens det ved understøtningen er lejetryk og forankring af længdearmering, som er dimensionsgivende.

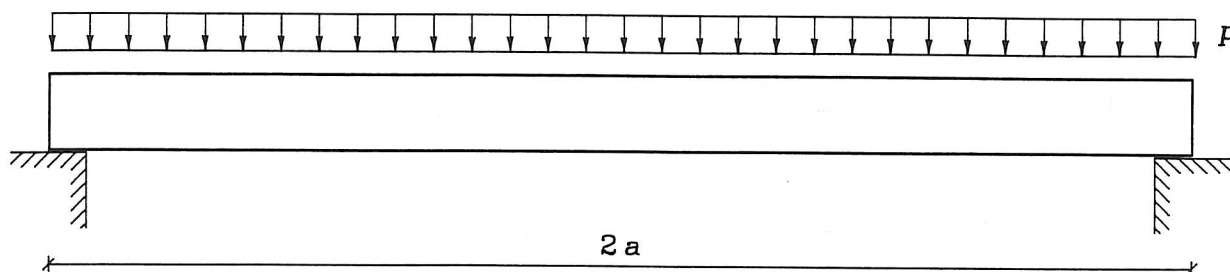


Figur 1.3

I STATISK TILLADELIGE SPÆNDINGER OG KRÆFTER

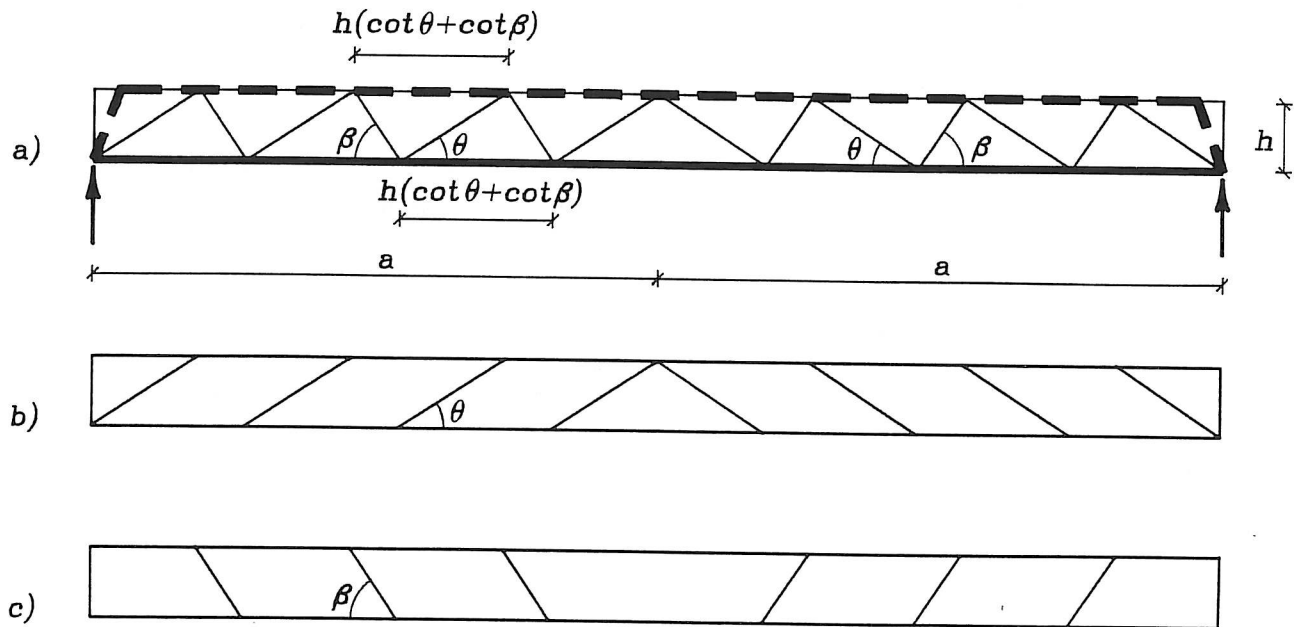
2. Simpelt understøttede bjælker.

I første omgang knyttes betragtningerne til en simpelt understøttet bjælke med en jævnt fordelt last, p på oversiden, se figur 2.1. Momentet i bjælken optages hovedsageligt i en



Figur 2.1

aksialt påvirket trykstringer i betonen i bjælkens overside og i en trækstringer i længdearmeringen i bjælkens underside. Regnemodellen kommer derfor til at bestå af disse stringere med indbyrdes afstand h og nogle trekantformede områder i bjælkekroppen, som vist i figur 2.2a, hvor trykstringere er vist med tyk, punkteret streg og trækstringere med tyk, fuld streg. De trekantformede områder er fastlagt ud fra beliggenheden af understøtninger og momentmaksimum og nogle passende valg af vinklerne θ og β . I hvert område forudsættes konstante spændinger, dvs. homogen spændingstilstand. Yderligere forudsættes betonspændingen m at være en konstant enakset spænding under vinklen θ i hvert af de parallellogramformede områder i figur 2.2b og bøjlearmeringsspændingen t forudsættes konstant i hvert af de parallellogramformede områder i figur 2.2c.

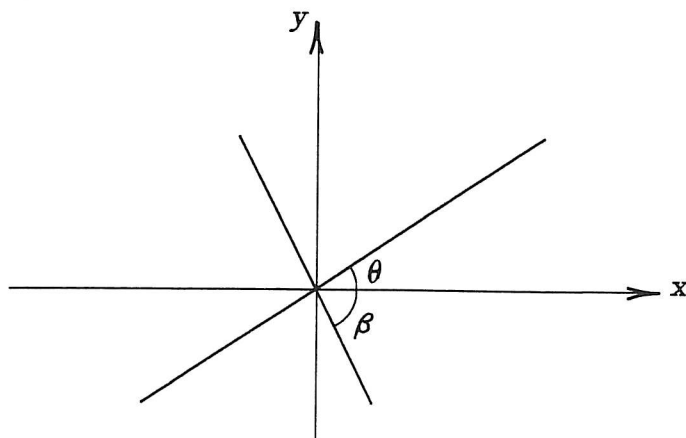


Figur 2.2

Randbetingelserne kræver $\sigma_{yy} = -p/b$ i de trekanter, som har en side fælles med trykstringeren i bjælkens overside, og $\sigma_{yy} = 0$ i de trekanter, som har en side fælles med trækstringeren i undersiden. b er bjælkens kropbredde.

2.1 Forskydningszoner.

I bjælkekroppen antages som nævnt, at der er enakset tryk i betonen og enakset træk i bøjlearmeringen. En enakset spænding m , positiv som træk, i betonen under en vinkel θ



Figur 2.3

med x -aksen, som bjælkens længderetning, se figur 2.3 svarer til spændingskomponenterne m_{xx} , m_{yy} og m_{xy} i x, y -systemet, og i overensstemmelse med transformationsformlerne har man

$$\begin{aligned} m_{xx} &= m \cos^2 \theta \\ m_{yy} &= m \sin^2 \theta \\ m_{xy} &= m \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

Med den enaksede spænding t under vinklen β i bøjlearmeringen har man tilsvarende komponenterne

$$\begin{aligned} t_{xx} &= t \cos^2 \beta \\ t_{yy} &= t \sin^2 \beta \\ t_{xy} &= -t \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Når bøjlerne sidder passende tæt, kan man regne bøjlekræfterne kontinuert fordelt og i det kompositmateriale, som er sammensat af beton og bøjlearmering, finder man spændingerne

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= m_{xx} + \varphi t_{xx} \\ \sigma_{yy} &= m_{yy} + \varphi t_{yy} \\ \sigma_{xy} &= m_{xy} + \varphi t_{xy} \end{aligned} \quad (2.3)$$

hvor φ er armeringsforholdet dvs. forholdet mellem armeringsarealet og det totale areal (armering + beton) i et vilkårligt snit. (φ er også volumenforholdet.) Mere præcist er t en ekstraspænding i armeringen, idet denne også skal optage spændingerne i den omliggende beton. Med de forholdsvis små armeringsforhold som man normalt anvender, er der imidlertid ingen grund til at skelne mellem totale spændinger og ekstraspændinger.

Indsættes (2.1) og (2.2) i (2.3) har man

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= m \cos^2 \theta + \varphi t \cos^2 \beta \\ \sigma_{yy} &= m \sin^2 \theta + \varphi t \sin^2 \beta \\ \sigma_{xy} &= m \sin \theta \cos \theta - \varphi t \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \quad (2.4)$$

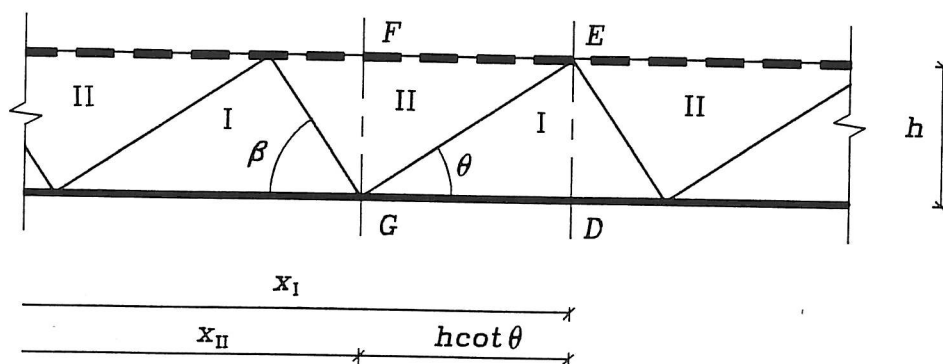
Af de syv størrelser σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , m , θ , φt og β skal man altså kende fire, for at spændingstilstanden er fastlagt.

Kender man f.eks. σ_{yy} , σ_{xy} , θ og β bliver

$$\begin{aligned} m \sin^2 \theta &= (\sigma_{yy} \cot \beta + \sigma_{xy}) / (\cot \theta + \cot \beta) \\ \varphi t \sin^2 \beta &= (\sigma_{yy} \cot \theta - \sigma_{xy}) / (\cot \theta + \cot \beta) \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} \cot \theta \cot \beta + \sigma_{xy} (\cot \theta - \cot \beta) \end{aligned} \quad (2.5)$$

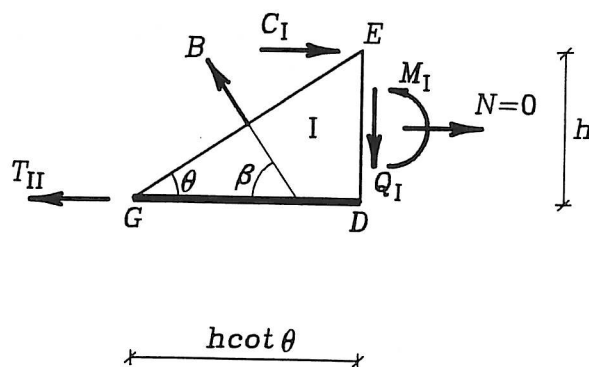
2.1.1 Bøjle- og betonspændinger.

Figur 2.4 viser en del af bjælkens forskydningszone. Trekanten med en side fælles med trækstringeren er kaldt type I, og trekanten med en side fælles med trykstringeren er betegnet type II.



Figur 2.4

Med kendte værdier af θ , β og σ_{yy} skal blot en af størrelserne m , φ_t , σ_{xx} eller σ_{xy} bestemmes for at spændingstilstanden i kroppen er beskrevet. Hertil kommer naturligvis kræfterne C og T i henholdsvis tryk- og trækstringer, som også skal bestemmes.



Figur 2.5

I figur 2.5 er vist en del, DEG , af en trekant af type I. På snitfladen DE er snitkræfterne $N = 0$, Q_I og M_I og på snitfladen EG er snitkræfterne C_I i trykstringeren, T_{II} i trækstringeren og resultanten B af bøjlespændingerne. Da bøjlespændingerne er konstant i hele trekanten, ligger resultanten midt på siden EG , og da EG danner vinklen θ med bjælkeaksen, overføres der ikke kræfter i betonen.

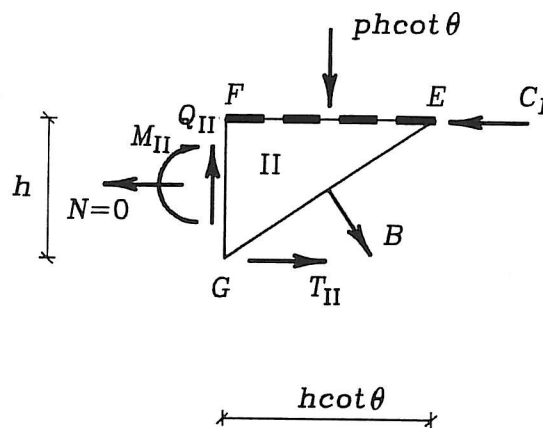
Projektion på DE giver

$$B \sin \beta = Q_I \quad (2.6)$$

og moment om D giver

$$\begin{aligned} C_I h &= M_I - \frac{1}{2} B \sin \beta h \cot \theta + \frac{1}{2} B \cos \beta h \\ &= M_I - \frac{1}{2} Q_I h (\cot \theta - \cot \beta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Tilsvarende betragtes en del, EFG , af en trekant af type II i figur 2.6.



Figur 2.6

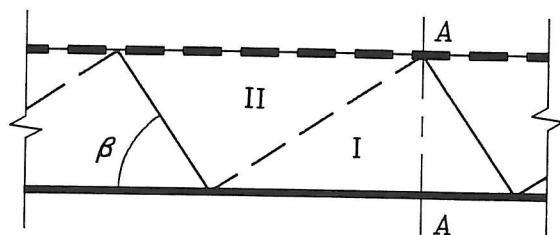
Projektion på FG giver

$$B \sin \beta = Q_{II} - ph \cot \theta = Q_I \quad (2.8)$$

og moment om I giver

$$\begin{aligned} T_{II} h &= M_{II} + \frac{1}{2} (B \sin \beta + ph \cot \theta) h \cot \theta - \frac{1}{2} B \cos \beta h \\ &= M_{II} + \frac{1}{2} Q_{II} h \cot \theta - \frac{1}{2} (Q_{II} - ph \cot \theta) h \cot \beta \\ &= M_{II} + \frac{1}{2} Q_{II} h (\cot \theta - \cot \beta) + \frac{1}{2} ph^2 \cot \theta \cot \beta \end{aligned} \quad (2.9)$$

Bøjlekraften $B = Q_I / \sin \beta$ er resultanten af bøjlespændingen t på et areal $\varphi b h (\cot \theta + \cot \beta) \sin \beta$ vinkelret på bøjlerne. I et parallellogramformet område



Figur 2.7

som vist i figur 2.7 er bøjlespændingen derfor bestemt ved

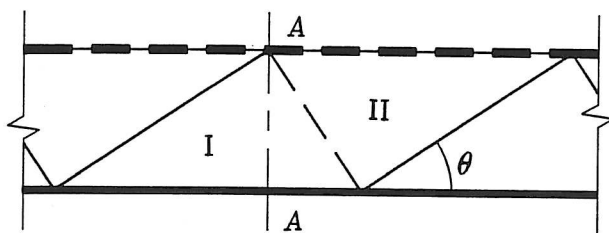
$$\varphi t b h (\cot \theta + \cot \beta) \sin \beta = B = Q_I / \sin \beta \quad (2.10)$$

eller

$$\varphi t \sin^2 \beta = \frac{Q}{b h (\cot \theta + \cot \beta)} \quad (2.11)$$

hvor Q er forskydningskraften i snit $A - A$ i figur 2.7.

Betonspændingen m i et parallellogramformet område vist i figur 2.8, bestemmes



Figur 2.8

ved hjælp af randbetingelsen $\sigma_{yy} = 0$ i trekant I. Af (2.4.b) får man

$$m \sin^2 \theta = -\varphi t \sin^2 \beta = \frac{-Q}{b h (\cot \theta + \cot \beta)} \quad (2.12)$$

hvor Q igen er forskydningskraften i snit $A - A$.

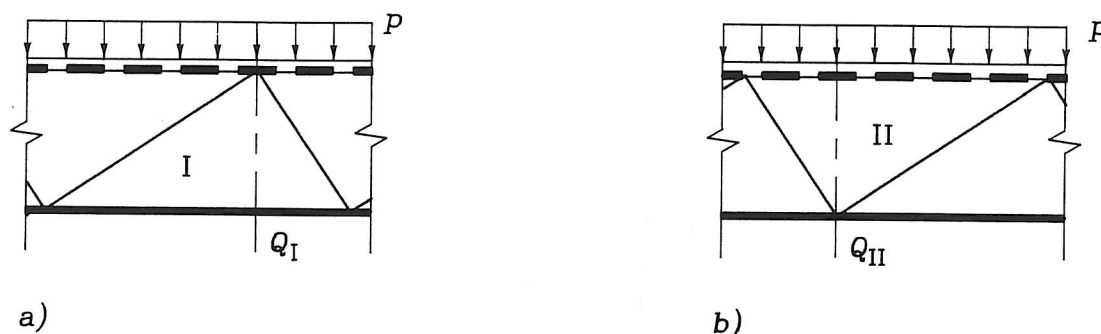
Med de fundne værdier af φt og m har man i en trekant af type I ved hjælp af (2.4)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -Q_I(\cot \theta - \cot \beta)/bh \\ \sigma_{yy} &= 0 \\ \sigma_{xy} &= -Q_I/bh\end{aligned}\tag{2.13}$$

I en trekant af type II bliver kompositsspændingerne

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -Q_{II}(\cot \theta - \cot \beta)/bh - p \cot \theta \cot \beta/b \\ \sigma_{yy} &= -p/b \\ \sigma_{xy} &= -Q_{II}/bh\end{aligned}\tag{2.14}$$

I (2.13) er Q_I forskydningskraften i et normalsnit gennem trekantens øverste



Figur 2.9

hjørne, dvs. det eneste normalsnit som kun skærer en trekant af type I. Tilsvarende er Q_{II} i (2.14) forskydningskraften i et normalsnit gennem nederste hjørne af en trekant af type II, se figur 2.9.

Fordelingen af spændinger, det være sig σ_{xx} eller σ_{xy} , i et vilkårligt normalsnit, er vist i figur 2.10.

De fundne spændinger er konstante indenfor trekantformede områder af bjælkekroppen, og det medfører, at der optræder spændingsdiskontinuiteter ved overgangen fra en trekant til en anden. Da spændingerne er bestemt ved ligevægtsbetragtninger, er de i appendix A, specialtilfælde b, udledte spændingsdiskontinuitetsbetingelser uden videre opfyldt.

Man bemærker, at de fundne udtryk for spændingerne m , φt og σ_{xx} fremgår af udtrykkene (2.5), når man for trekanter af type I indsætter $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xy} = -Q_I/bh$ og for trekanter af type II indsætter $\sigma_{yy} = -p/b$ og $\sigma_{xy} = -Q_{II}/bh$.



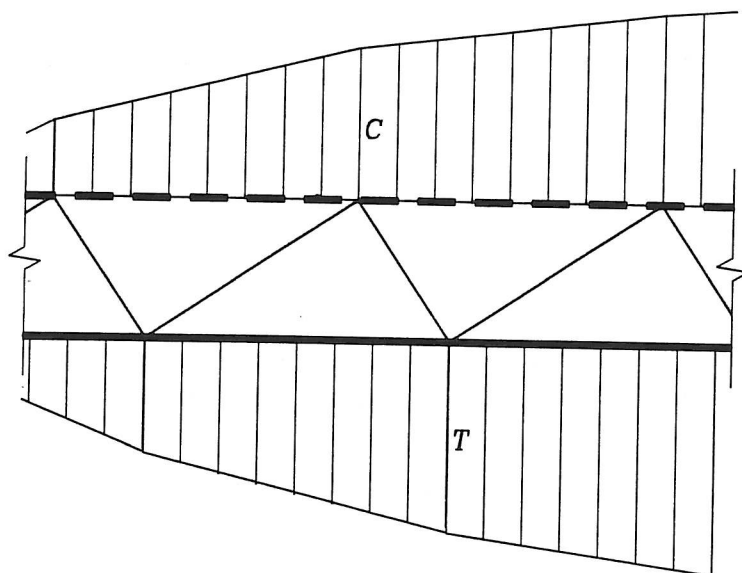
Figur 2.10

2.1.2 Stringerkræfter.

Kræfterne C og T i de horisontale tryk- og trækstringere er bestemt ved udtrykkene (2.7) og (2.9)

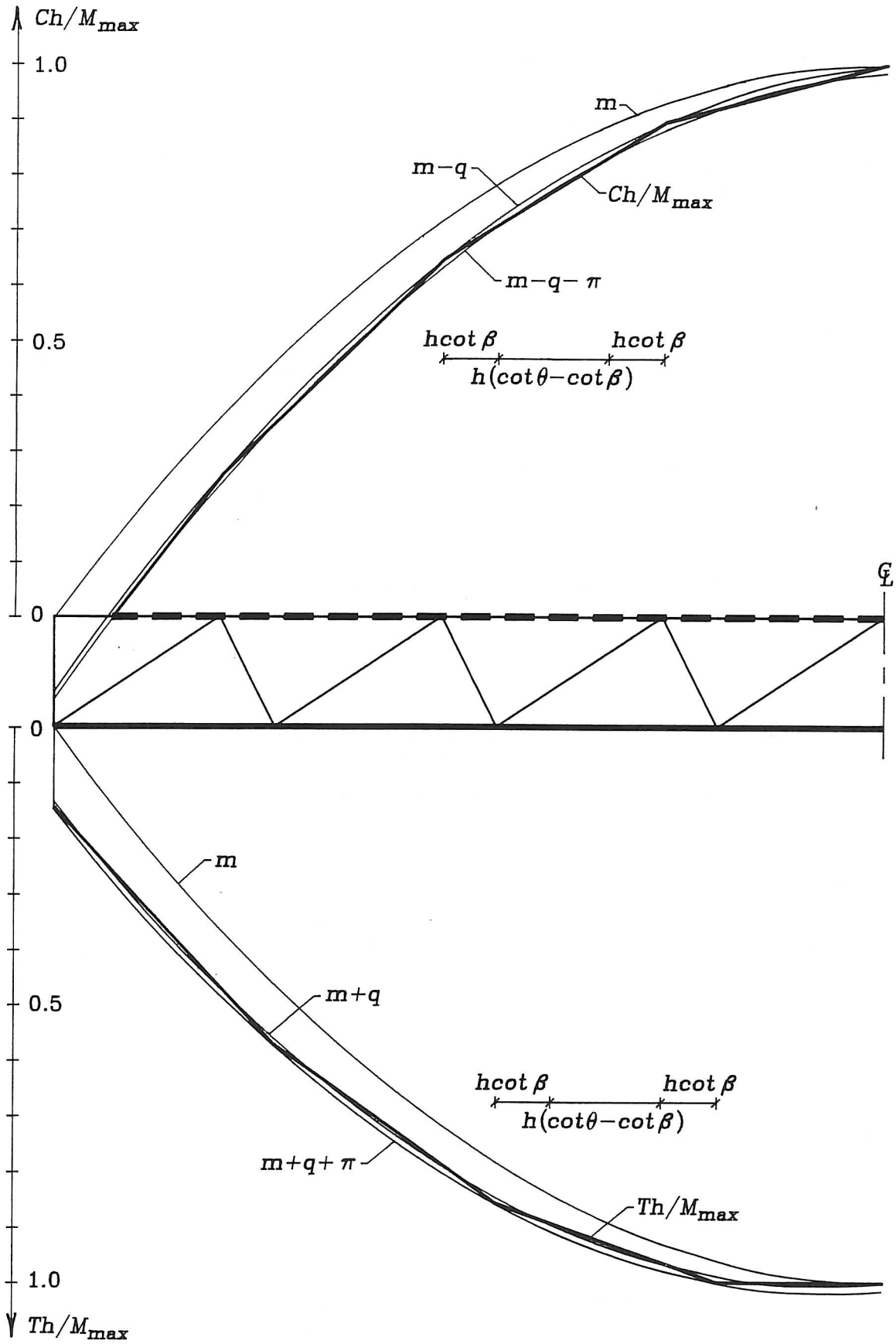
$$Ch = M - \frac{1}{2}Qh(\cot \theta - \cot \beta) \quad (2.15)$$

$$Th = M + \frac{1}{2}Qh(\cot \theta - \cot \beta) + \frac{1}{2}ph^2 \cot \theta \cot \beta \quad (2.16)$$



Figur 2.11

(2.15) giver sammenhørende værdier af C , M og Q i de punkter af trykstringeren, som falder sammen med trekanthjørner og tilsvarende giver (2.16) sammenhørende værdier af T , M og Q i de punkter af trækstringeren, som falder sammen med trekanthjørner, se figur 2.11. Imellem hjørnepunkterne varierer stringerkræfterne lineært da spændingerne, specielt forskydningsspændingerne, er konstante i de enkelte trekanten. Man har for eksempel $T(x) = T(x_0) - \int_{x_0}^x \sigma_{xy} b ds = T(x_0) - \sigma_{xy} b(x - x_0)$.



Figur 2.12

$$m = M/M_{\max}$$

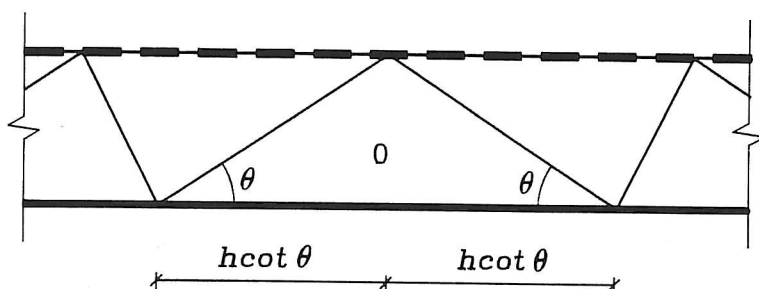
$$q = \frac{1}{2} Q h (\cot \theta - \cot \beta) / M_{\max}$$

$$\pi = \frac{1}{2} p h^2 \cot \theta \cot \beta / M_{\max}$$

I figur 2.12 er trykkraften C sammenholdt med M/h , $M/h - \frac{1}{2}Q(\cot \theta - \cot \beta)$ og $M/h - \frac{1}{2}Q(\cot \theta - \cot \beta) - \frac{1}{2}ph \cot \theta \cot \beta$ og tilsvarende er trækraften T sammenholdt med M/h , $M/h + \frac{1}{2}Q(\cot \theta - \cot \beta)$ og $M/h + \frac{1}{2}Q(\cot \theta - \cot \beta) + \frac{1}{2}p \cot \theta \cot \beta$. Det fremgår, at trykkraften intet steds er større end $M/h - \frac{1}{2}Q(\cot \theta - \cot \beta)$, og at trækraften intet steds er større end $M/h + \frac{1}{2}Q(\cot \theta - \cot \beta) + \frac{1}{2}ph \cot \theta \cot \beta$ ligesom trækraften heller ikke er større end M_{max}/h .

2.2 Momentmaksimum.

Ved momentmaksimum, hvor forskydningskraften skifter fortegn, og hvor betontrykket og bøjletrækket derfor skifter retning, forekommer en trekant, som er lidt



Figur 2.13

forskellig fra de trekanter, vi hidtil har betragtet, se figur 2.2 og 2.13. I overensstemmelse med (2.11), (2.12) og (2.13) er spændingerne nul i denne trekant og trækraften T i trækstringeren er derfor konstant og lig med M_{max}/h , som vist i figur 2.12.

2.3 Understøtninger.

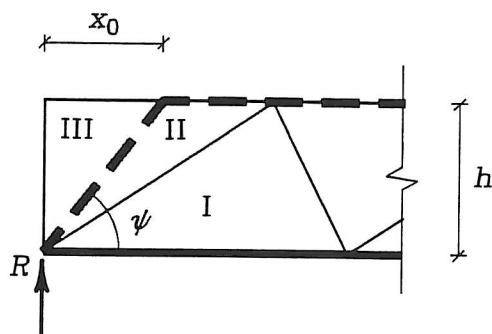
Af figur 2.12 og udtrykkene (2.7) og (2.9) fremgår, at kraften i trykstringeren i bjælkens overside er nul i en afstand x_0 fra understøtningen, som kan udregnes til at være

$$x_0 = (R(\cot \theta - \cot \beta) + ph \cot \theta \cot \beta)h/2R \quad (2.17)$$

og, at kraften i trækstringeren i undersiden er

$$T_0 = (R(\cot \theta - \cot \beta) + ph \cot \theta \cot \beta)/2 \quad (2.18)$$

i understøtningspunktet, hvor R er reaktionen i den pågældende understøtning. En statisk tilladelig spændingsfordeling har man med spændinger i trekkanterne I og



Figur 2.14

II i figur 2.14 beregnet som tidligere ved (2.13) og (2.14), mens spændingerne i trekant III er

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 0 \\ \sigma_{yy} &= -p/b \\ \sigma_{xy} &= 0\end{aligned}\tag{2.19}$$

Betonspændingen m i trekant II bestemmes af (2.12) med

$$Q = Q_I + ph(\cot \theta + \cot \beta) = R + ph \cot \beta\tag{2.20}$$

Hermed er randbetingelsen $\sigma_{yy} = -p/b$ langs bjælkens overside opfyldt.

Trekant II og III er adskilt af en skrå trykstringer, som forbinder understøtningspunktet med det punkt, hvori kraften i den vandrette stringer i bjælkens overside er nul. Trykkraften S i den skrå stringer er

$$S = R(h - y)/h \sin \psi\tag{2.21}$$

hvor ψ er vinklen mellem bjælkens længdeakse og stringeren bestemt ved

$$\cot \psi = T_0/R = x_0/h = (R(\cot \theta - \cot \beta) + ph \cot \theta \cot \beta)/2R\tag{2.22}$$

og y måles opad fra bjælkens underside. Om den skrå stringer gælder, at såvel placering som stringerkraft er i overensstemmelse med appendiks A, specialtilfælde a .

2.4 Andre lasttilfælde.

Ovenfor er udtrykkene (2.11), (2.12), (2.7) og (2.9) dvs.

$$\varphi t \sin^2 \beta = Q/bh(\cot \theta + \cot \beta)\tag{2.11}$$

$$m \sin^2 \theta = -Q/bh(\cot \theta + \cot \beta) \quad (2.12)$$

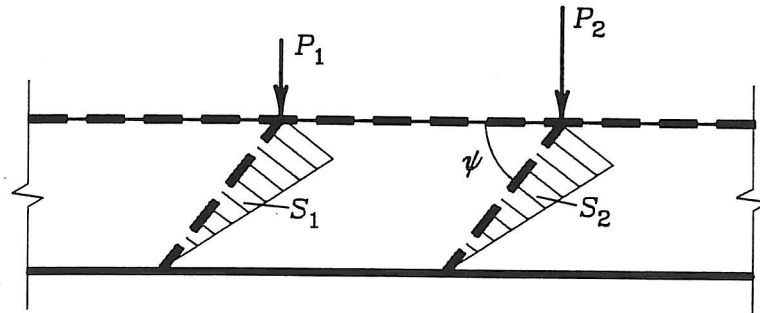
$$Ch = M - \frac{1}{2}Qh(\cot \theta - \cot \beta) \quad (2.7)$$

$$Th = M + \frac{1}{2}Qh(\cot \theta + \cot \beta) + \frac{1}{2}ph^2 \cot \theta \cot \beta \quad (2.9)$$

til bestemmelse af bøjlespændinger t , betonspændinger m , kraft i trykstringer C og kraft i trækstringer T , udledt under forudsætning af blandt andet jævnt fordelt last p på bjælkens overside. Da man kan sætte $p = 0$, kan udtrykkene umiddelbart benyttes for bjælker belastet med enkeltkræfter, mens jævnt fordelt last på bjælkens underside kræver en lille modifikation af udtrykkene.

2.4.1 Enkeltkræfter.

I en bjælke belastet alene med enkeltkræfter er forskydningskraften konstant på en strækning mellem to enkeltkræfter, se figur 2.15. De ovenfor anførte udtryk gælder



Figur 2.15

derfor i hele det viste parallellogramformede område med $p = 0$, ligesom man har kompositsspændingerne

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -Q(\cot \theta - \cot \beta)/bh \\ \sigma_{yy} &= 0 \\ \sigma_{xy} &= -Q/bh \end{aligned} \quad (2.23)$$

Området begrænses af de to vandrette stringere med kræfterne C og T samt af yderligere to skrå stringere. I disse skrå stringere bestemmes trykkraften S af

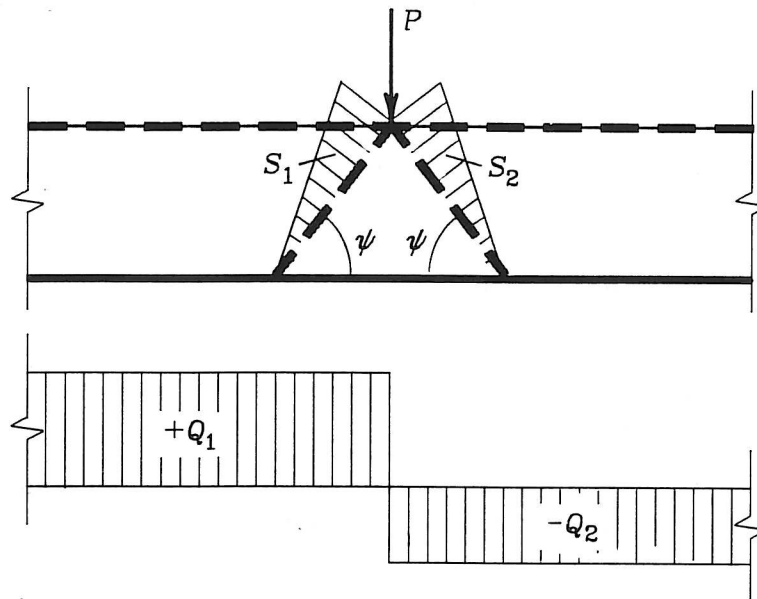
$$S = Py/h \sin \psi \quad (2.24)$$

hvor vinklen ψ bestemmes af

$$\cot \psi = \frac{1}{2}(\cot \theta - \cot \beta) \quad (2.25)$$

og y regnes opad fra bjælkens underside.

Ved momentmaksimum bliver forholdene som vist i figur 2.16 med ψ bestemt ved



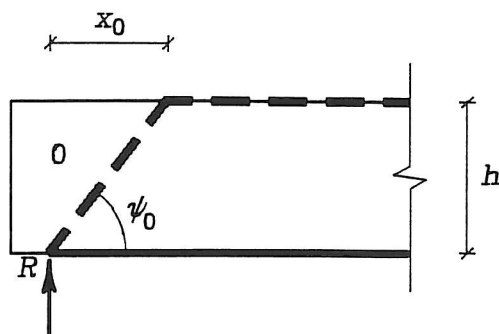
Figur 2.16

(2.25). Stringerkræfterne bestemmes af

$$\begin{aligned} S_1 &= Q_1 y/h \sin \psi \\ S_2 &= Q_2 y/h \sin \psi \end{aligned} \quad (2.26)$$

I trekanten mellem de to skrå stringere og trækstringeren i bjælkens underside er spændingerne $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$. Hermed bliver trækraften i den vandrette stringer langs trekantens side konstant lig med M_{max}/h .

Forholdene ved en endeunderstøtning er vist i figur 2.17. Afstanden x_0 angiver



Figur 2.17

beliggenheden af det punkt, hvori kraften C i den vandrette stringer i bjælkens overside er nul (bestemt ved (2.17)). Stringerkraften i den skrå stringer bestemmes ved

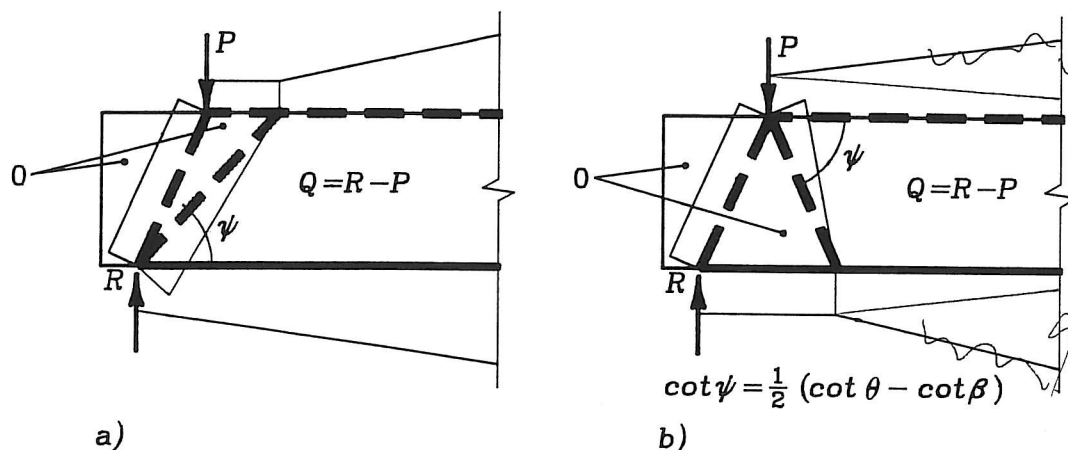
$$S = R(h - y)/h \sin \psi_0 \quad (2.27)$$

hvor R er reaktionen, y regnes opad fra bjælkens underside og vinklen ψ_0 bestemmes ved

$$\cot \psi_0 = T_0/R = \frac{1}{2}(\cot \theta - \cot \beta) \quad (2.28)$$

når der ikke findes nogen enkeltkraft på strækningen med længden x_0 . T_0 er kraften i trækstringeren ved understøtningen.

Hvis bjælken er belastet på den nævnte strækning bliver systemet som vist i figur 2.18. Figur 2.18a viser forholdene, når momentmaksimum findes til højre for enkeltkraften,

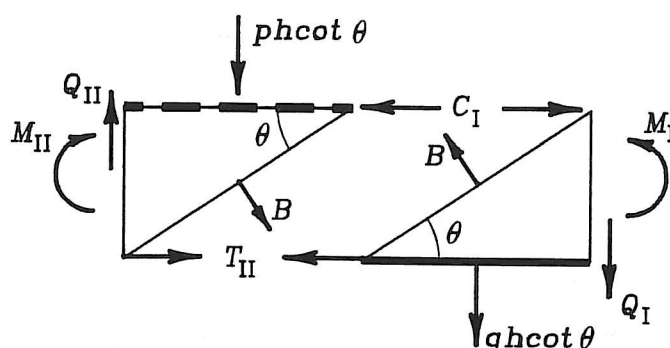


Figur 2.18

mens figur 2.18b viser forholdene, når momentmaksimum findes under P .

2.4.2. Last på undersiden.

Hvis bjælken foruden en jævnt fordelt last p på oversiden også belastes af en jævnt fordelt last q ophængt i undersiden, finder man ved hjælp af figur 2.19 (jævnfør



Figur 2.19

figurerne 2.5 og 2.6), at bøjlekraften bliver

$$B \sin \beta = Q_I + qh \cot \theta \quad (2.29)$$

og udtrykkene (2.11), (2.12), (2.7) og (2.9) modificeres til

$$\begin{aligned} \varphi t \sin^2 \beta &= (Q + qh \cot \theta) / bh (\cot \theta + \cot \beta) \\ m \sin^2 \theta &= -(Q - qh \cot \beta) / bh (\cot \theta + \cot \beta) \\ Ch &= M - \frac{1}{2} Qh (\cot \theta - \cot \beta) + \frac{1}{2} qh^2 \cot \theta \cot \beta \\ Th &= M + \frac{1}{2} Qh (\cot \theta - \cot \beta) + \frac{1}{2} ph^2 \cot \theta \cot \beta \end{aligned} \quad (2.30)$$

Tillægget $qh \cot \theta$ til Q i (2.29) kan man opfatte som et tillæg til bøjlekraften på strækningen $h(\cot \theta + \cot \beta)$, der fører lasten på undersiden op til oversiden af bjælken.

Værdierne af φt , m , C og T på den ene side og M og Q på den anden side, hører sammen som i figur 2.7, 2.8 og 2.11 med tilhørende tekst.

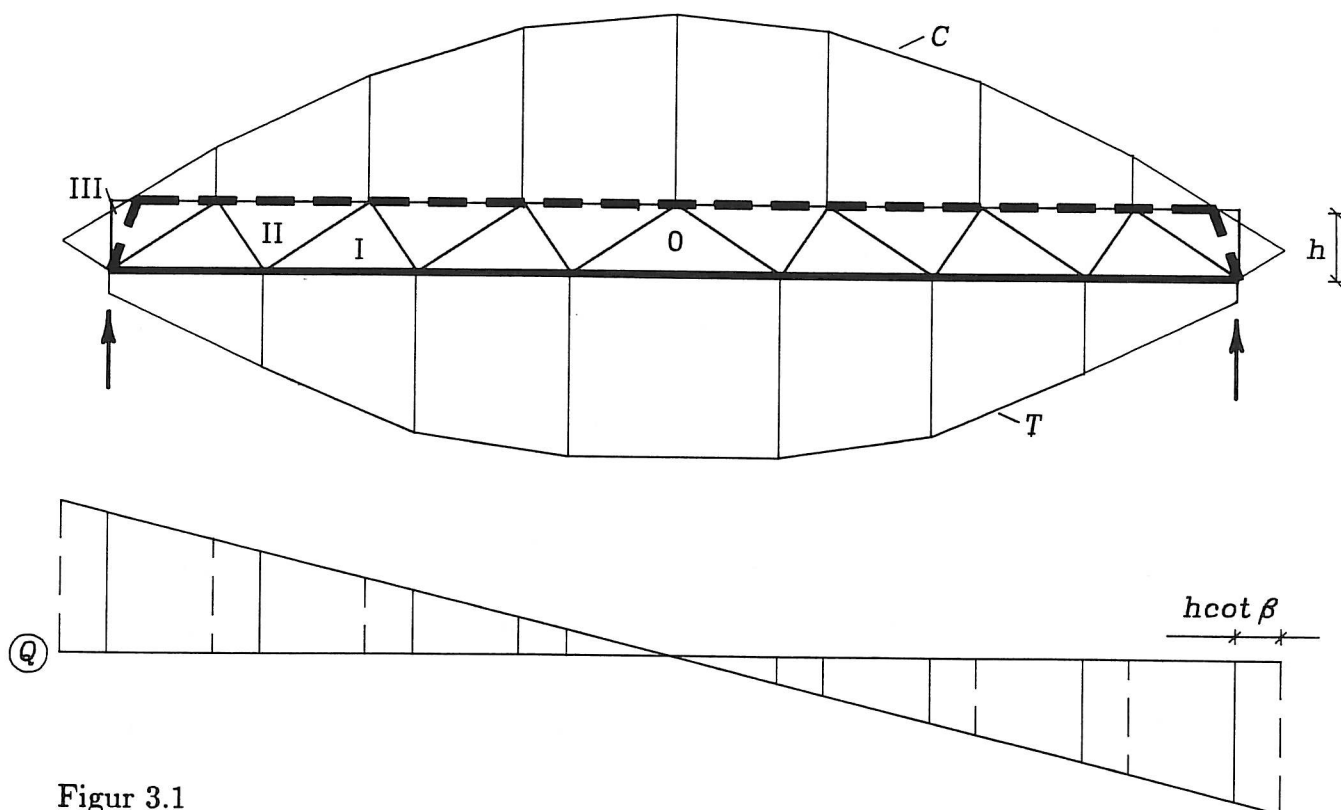
Ved en enkeltkraft virkende på undersiden kan lasten føres til oversiden ved hjælp af bøjler vinkelret på bjælkeaksen.

3. Bjælkesystemer.

I kapitel 2 er udledt udtryk til bestemmelse af bøjlespændinger og -kræfter, betonspændinger samt stringerkræfter i de vandrette træk- og trykstringere i bjælkens under- og overside og i de skrå trykstringere, som forekommer ved understøtningsreaktioner og andre enkeltkræfter. Betragtningerne er knyttet til de tre bjælke dele, som bjælken kan deles i, dvs. området omkring momentmaksimum, området omkring understøtningen og området herimellem, forskydningszonen. På de følgende sider skal stringerplaceringer, stringerkræfter og områder med konstante spændinger, som er statisk tilladelige, angives for et udvalg af hyppigt forekommende bjælkesystemer.

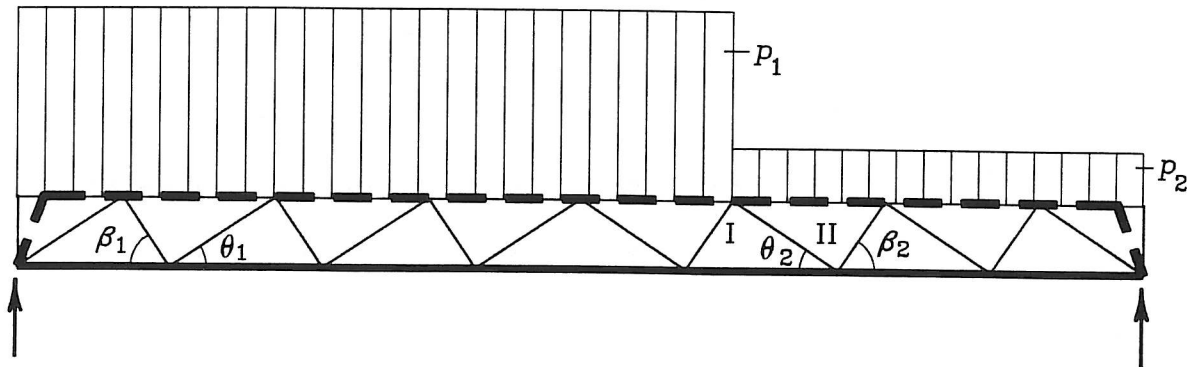
Bjælker over ét fag.

For en simpelt understøttet bjælke over et fag, belastet med en jævnt fordelt last p på oversiden, er det fuldstændige system vist i figur 3.1. I forskydningskraftkurven er med fuld streg vist værdier af forskydningskraften Q , som benyttes til udregning af trækkræften T og kompositsspændinger σ_{xx} , σ_{yy} og σ_{xy} i trekanter af type II. Med punkteret streg er vist værdier af Q , som benyttes til udregning af trykkræften C , kompositsspændinger i trekanter af type I samt bøjlespændinger φt og betonspændinger m .

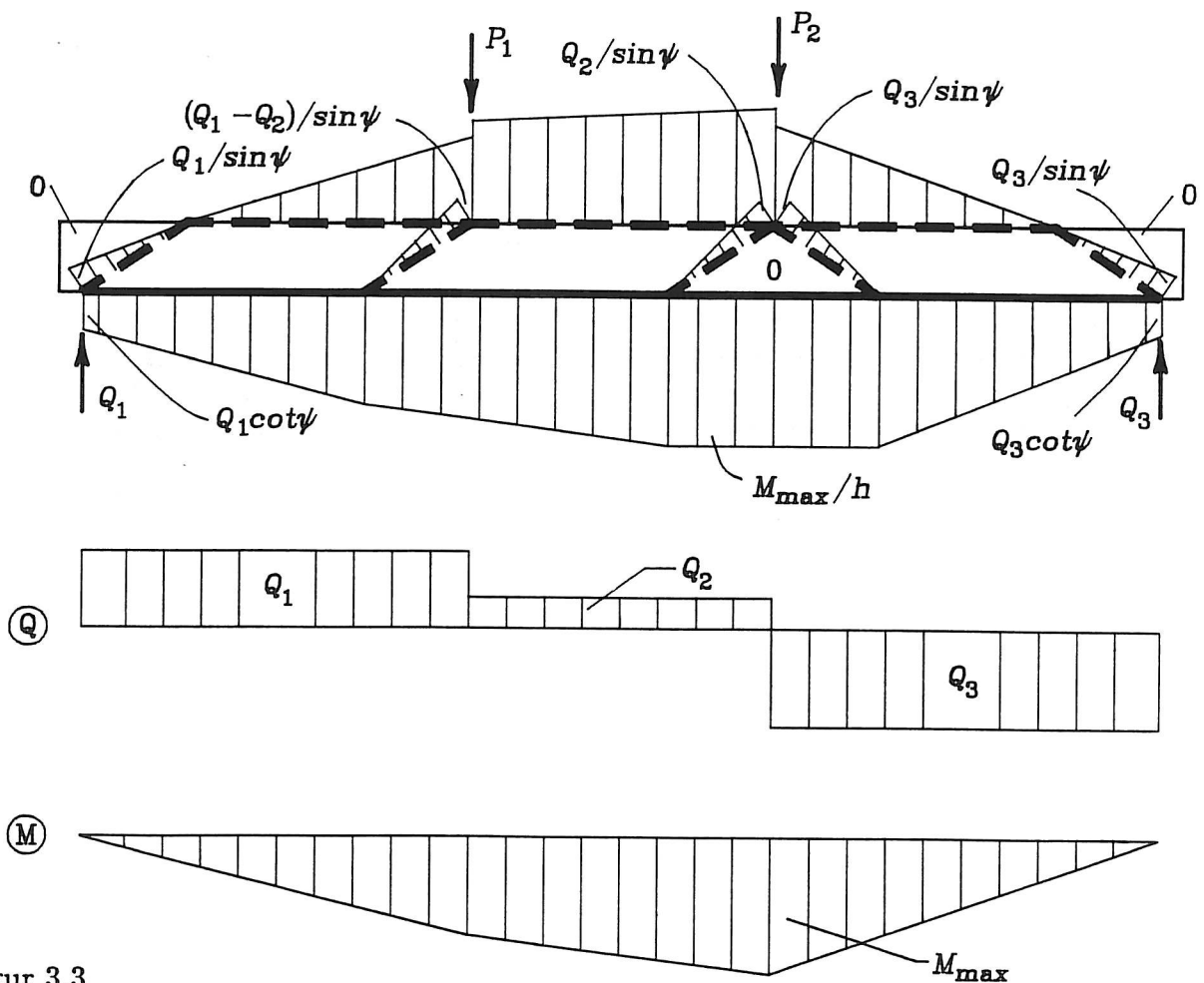


Figur 3.1

En kontinuerlig last behøver ikke at være konstant over hele bjælken. Last på oversiden skal blot være stykkevis konstant over trekanter af type II som vist i figur 3.2. I samme figur er vist, at det kan være nødvendigt at benytte forskellige værdier af θ (og/eller β) på hver sin side af momentmaksimum.



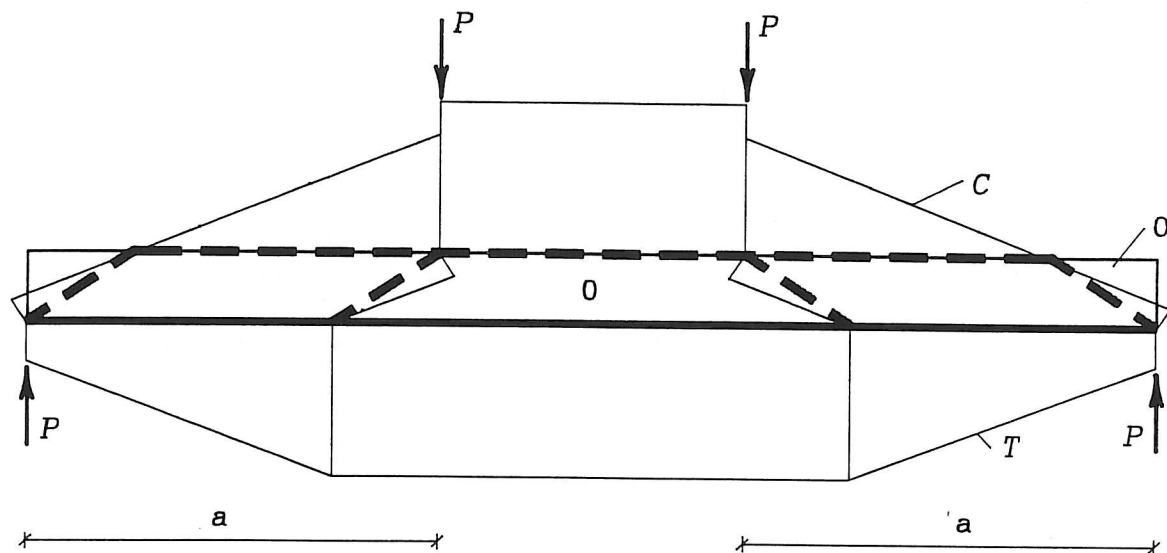
Figur 3.2



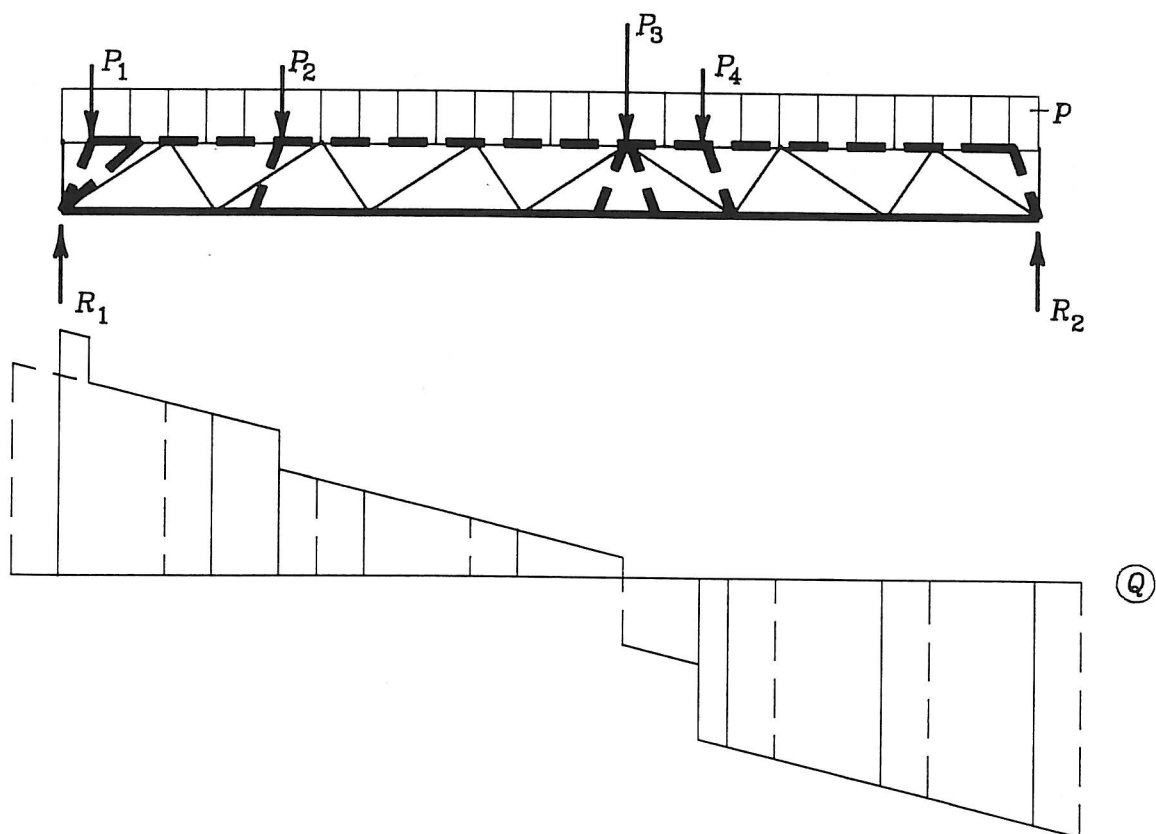
Figur 3.3

$$\cot \psi = \frac{1}{2}(\cot \theta - \cot \beta)$$

Eksempler på bjælker belastet med enkeltkræfter er vist i figur 3.3 og 3.4. I figur 3.3 er der tale om to vilkårligt placerede enkeltkræfter, mens figur 3.4 viser det specielle tilfælde, hvor kræfterne er symmetrisk placerede og lige store.



Figur 3.4

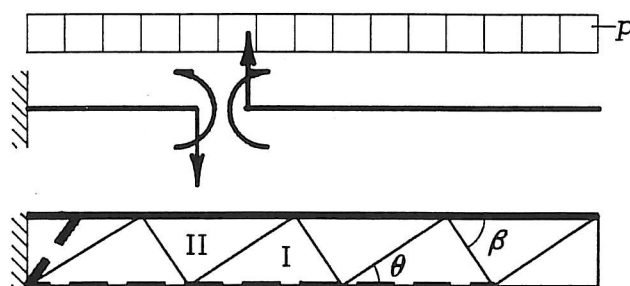


Figur 3.5

Lasttilfældene jævnt fordelt last og enkeltkræfter kan superponeres. Et eksempel på, hvorledes bjælke kroppen inddeles i trekanten og firkanter med konstante spændinger er vist i figur 3.5. Hældningen af de skrå trykstringere bestemmes af (2.25), $\cot \psi = \frac{1}{2}(\cot \theta - \cot \beta)$, i de tilfælde, hvor kraften virker på oversiden, mens $\cot \psi = T/R$ benyttes, hvor kraften R virker på bjælkens underside, T er kraften i trækstringeren ved understøtningen.

3.2 Udkragede bjælker.

Fremgangsmåden til bestemmelse af statisk tilladelige spændinger og stringerkræfter, der i kapitel 2 er anvendt på en simpelt understøttet bjælke, kan uden videre benyttes på en udkraget bjælke.

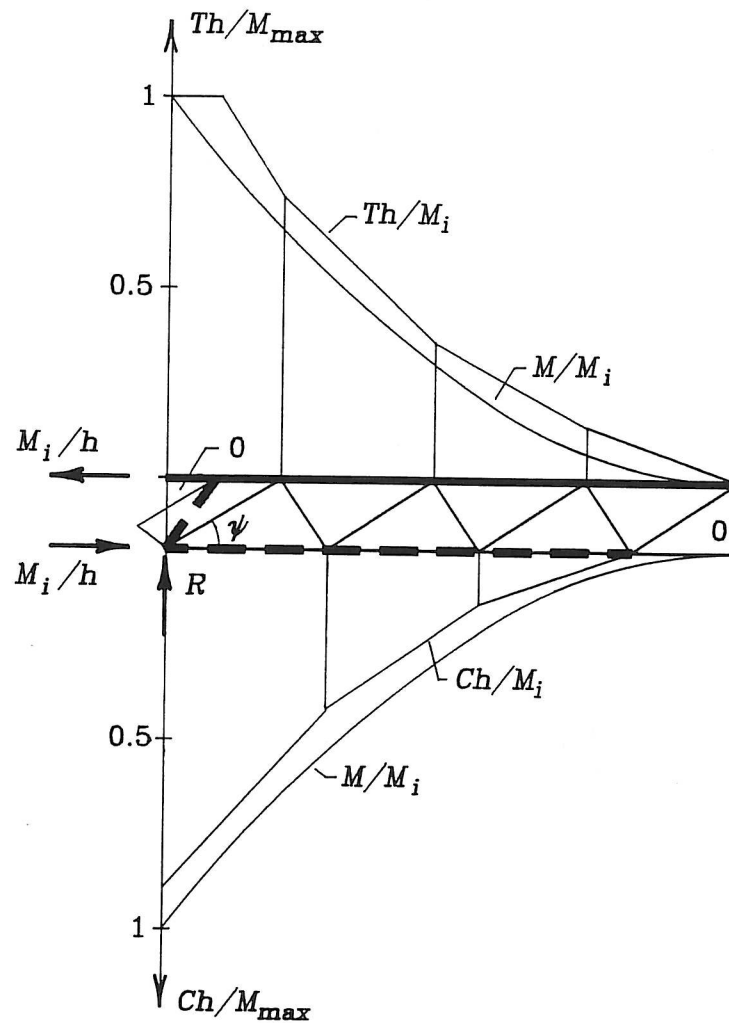


Figur 3.6

Figur 3.6 viser fortegneregning for snitkræfter, inddeling af bjælkekroppen i trekanten og placering af stringere. Udtrykkene til bestemmelse af stringerkræfterne i over- og underside af bjælken bliver, idet der nu er træk i oversiden og tryk i undersiden, se figur 3.7.

$$\begin{aligned} Th &= -\left(M - \frac{1}{2}Qh(\cot \theta - \cot \beta)\right) \\ Ch &= -\left(M + \frac{1}{2}Qh(\cot \theta - \cot \beta) + \frac{1}{2}ph^2 \cot \theta \cot \beta\right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Hældningen af den skrå stringer bestemmes af $\cot \psi = (M_i/h - C)/R = \frac{1}{2}(\cot \theta - \cot \beta) + \frac{1}{2}h \cot \theta \cot \beta/l$ i dette tilfælde. Stringerkraften aftager lineært fra $R/\sin \psi$ i undersiden af bjælken til nul i oversiden, hvor den skrå stringer skærer den vandrette trækstringer i det punkt, hvor trækraften er $T = M_{max}/h$.



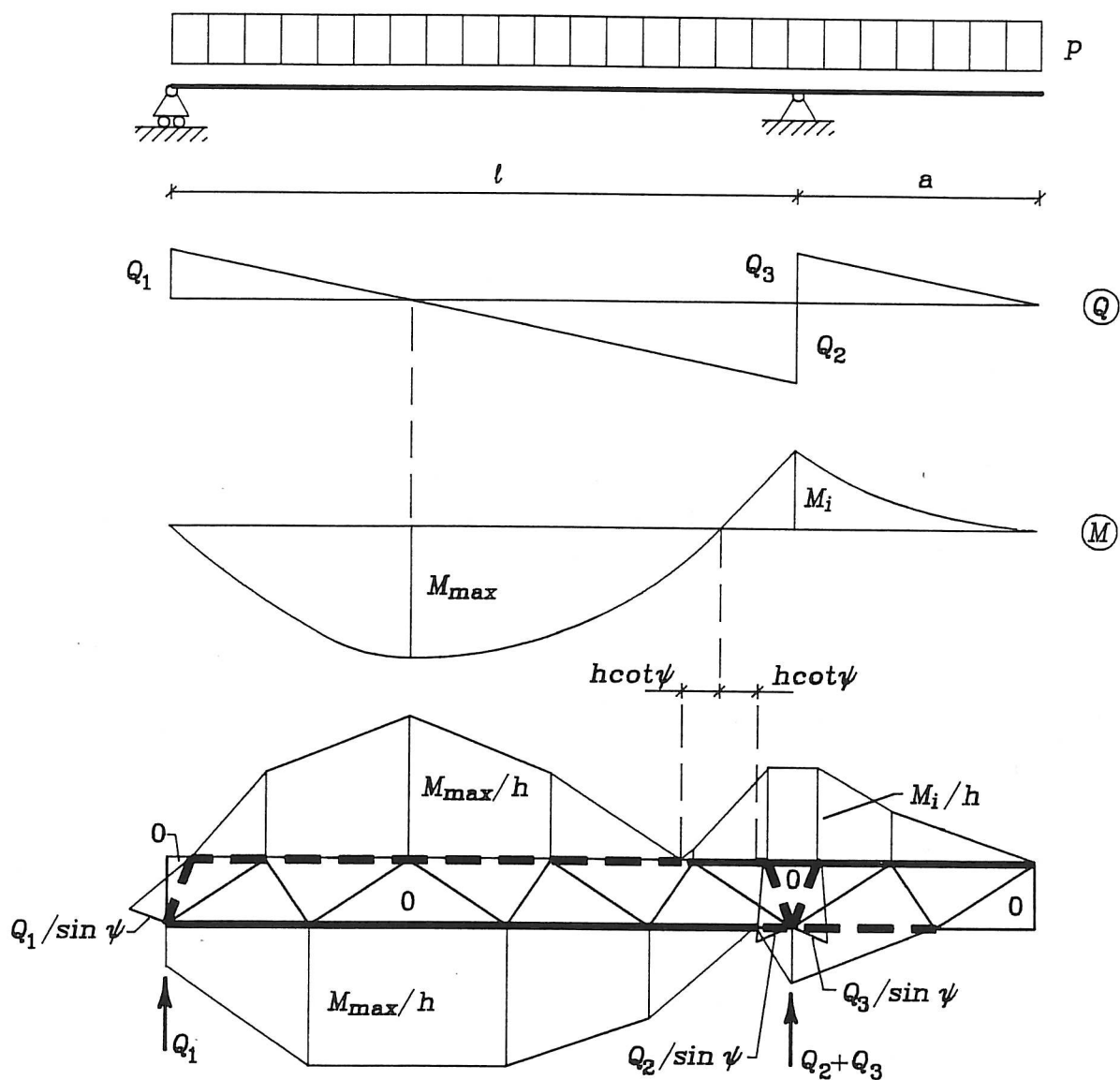
Figur 3.7

Et bjælkesystem sammensat af en simpelt understøttet og en udkraget bjælke er vist i figur 3.8. Ved understøtningerne bestemmes hældningen af de skrå stringere ved

$$\cot \psi_{\alpha} = (M_{i,\alpha}/h - C_{\alpha})/Q_{\alpha} \quad (3.2)$$

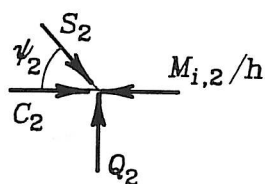
hvor kræfterne $M_{i,\alpha}/h$ og C_{α} i den vandrette stringer i bjælkens underside regnes positive som trykkræfter, se figur 3.9 som illustrerer forholdene i tilfældet $\alpha = 2$. Stringerkraften S_{α} bestemmes af

$$S_{\alpha} = Q_{\alpha} / \sin \psi_{\alpha} \quad (3.3)$$



Figur 3.8

Omkring momentnulpunktet bemærker man, at trækraften i stringerne i såvel overside som underside af bjælken fortsætter stykket l forbi momentnulpunktet.

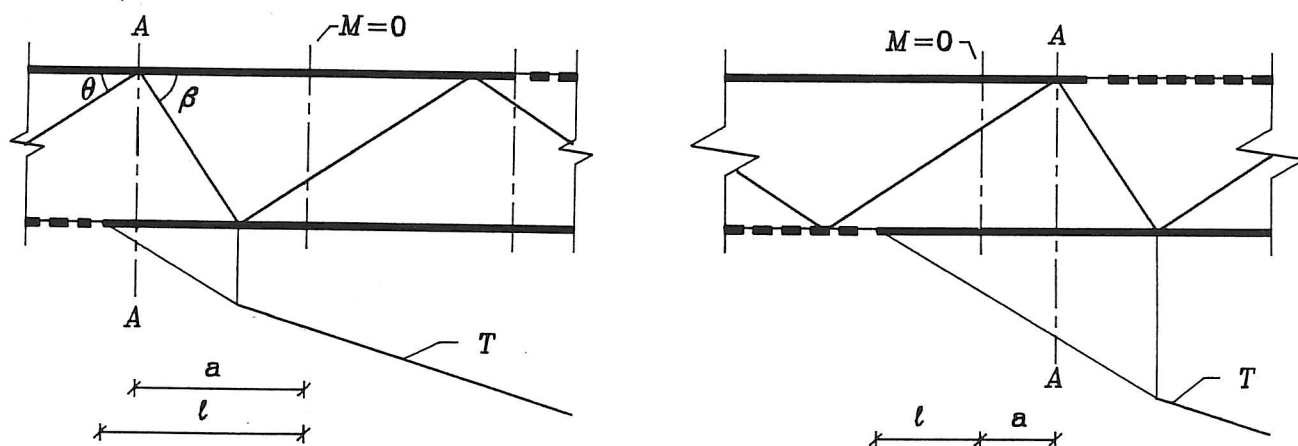


Figur 3.9

Længden l bestemmes her af

$$l = \frac{1}{2}h(\cot \theta - \cot \beta) + \frac{1}{2}pa^2/Q_A \quad (3.4)$$

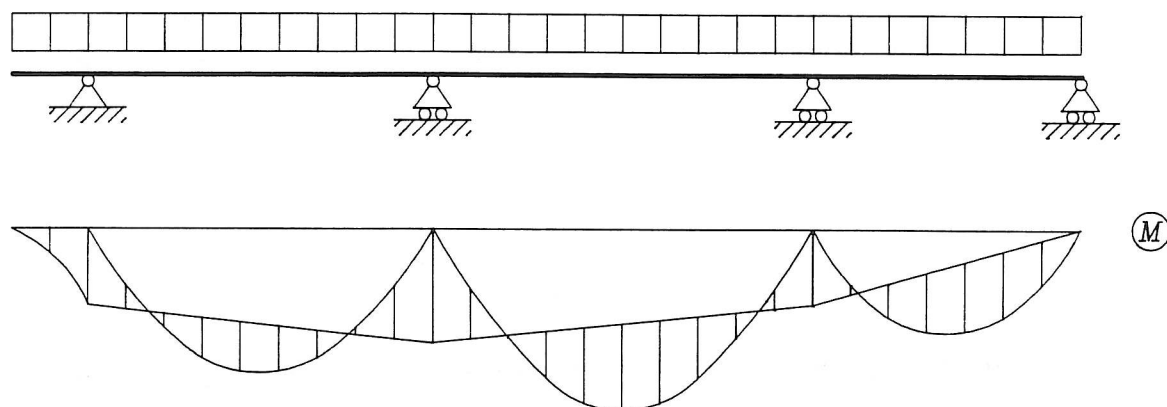
hvor a er afstanden fra momentnulpunktet til det snit $A - A$, hvis forskydningskraft Q_A benyttes til udregning af forskydningspændingen i den trekant på hvis side trækraften bliver nul. Nogle eksempler er vist i figur 3.10.



Figur 3.10

3.3 Bjælker over flere fag.

Bjælker støbt kontinuerlig over flere fag end et er statisk ubestemte, dvs. snitkræfter og reaktioner kan ikke entydigt bestemmes ved hjælp af ligevægtsligninger alene. Når det som her drejer sig om at fastlægge en statisk tilladelig snitkraftfordeling, er det konstruktøren, som ved sit valg af trækstringernes og dermed længdearmringens placering bestemmer, hvorledes bjælkesystemet skal fungere.

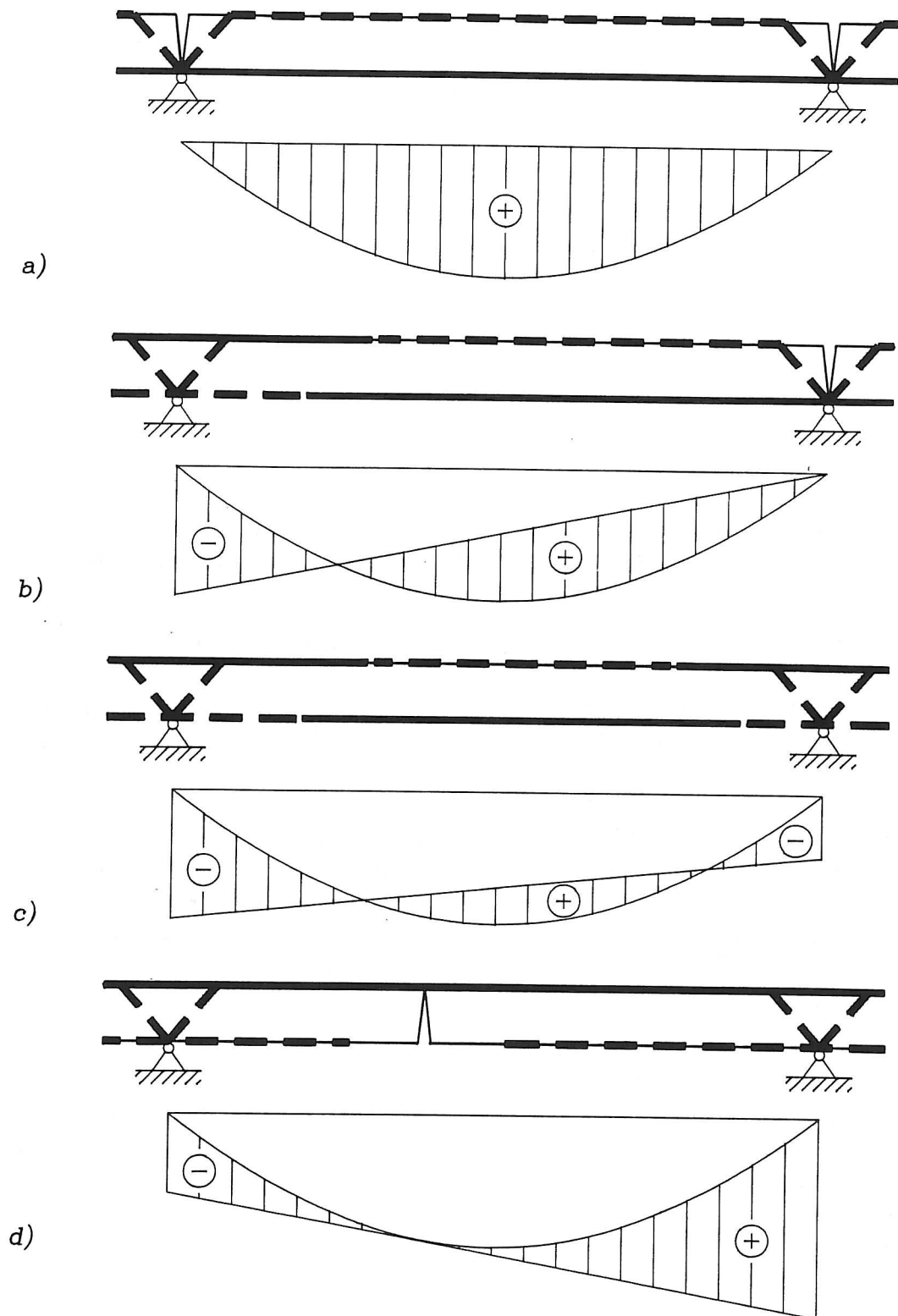


Figur 3.11

I systemet i figur 3.11 er momenterne over de to yderste understøtninger statisk bestemte, mens momenterne over mellemunderstøtningerne frit kan vælges indenfor visse grænser, hvorved snitkraftfordelingen er fuldstændig bestemt.

For en bjælke over et mellemfag er i figur 3.12 vist nogle af de muligheder, som man kan vælge imellem. I tilfælde a er der udelukkende længdearmering i undersiden af bjælken, i tilfælde b er der desuden armering i oversiden i den ene ende, i tilfælde c er der armering i oversiden i begge ender af bjælken foruden armering i undersiden, og i tilfælde d er der udelukkende længdearmering i bjælkens overside. De fleste af de viste armeringsarrangementer medfører, at der i enkelte normalsnit i bjælken dannes kraftige revner og dermed store gensidige vinkeldrejninger mellem de bjælke dele, som mødes der. Længdearmering kan ikke og skal ikke forhindre betonen i at revne ved momenter af en vis størrelse, med mindre der er tale om spændarmering. Armeringen forhindrer revnerne i at dele bjælken i to eller flere stykker og yderligere bevirker armeringen, at der i stedet for nogle få store revner fremkommer mange små revner. Som oftest vil det derfor være tilfælde c, som benyttes.

Momenterne er i figur 3.12 vist således, at momenter under slutlinien svarer til armering i bjælkens underside og momenter over slutlinien svarer til armering i oversiden. Figuren viser også noget om de grænser indenfor hvilke, man kan vælge indspændingsmomenter. Positive momenter som alle er større end nul, jvf. tilfælde a, og negative momenter som alle er mindre end nul, jvf. tilfælde d, kan nemlig kun etableres i ret specielle lastsituationer.



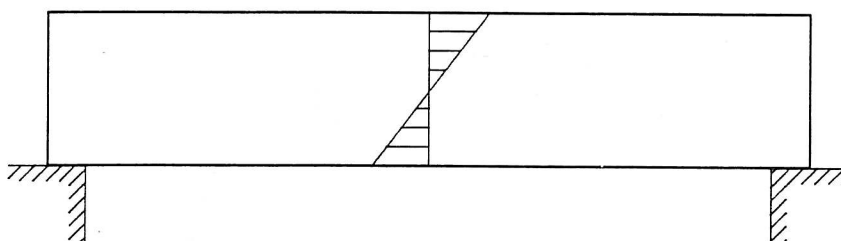
Figur 3.12

4. Andre beregningsmodeller.

Den beregningsmodel, der er beskrevet i kapitlerne 2 og 3, er baseret på forudsætninger om, at en betonbjælke er forsynet med længdearmering i bjælkens under- og/eller overside samt en tværarmering bestående af tætsiddende bøjler. Der eksisterer adskillige andre modeller, og en del af disse omtales i det følgende.

4.1 Uarmerede bjælker.

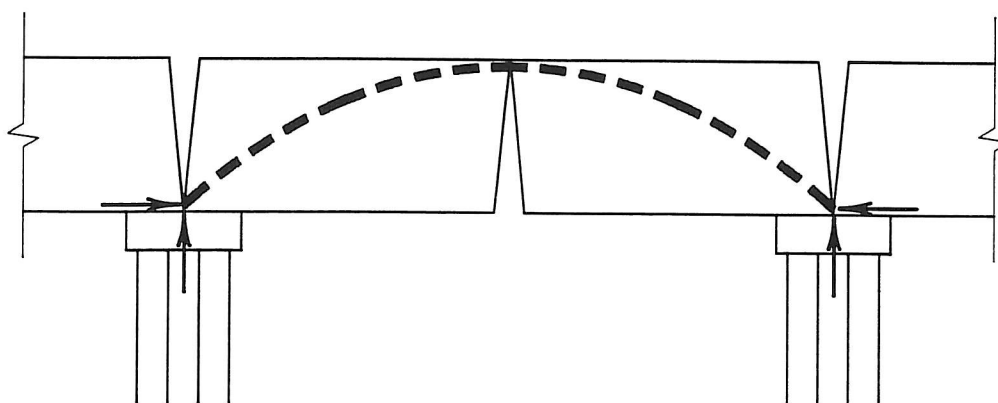
Uarmeret beton, som påvirkes til passende små tøjninger og spændinger, opfører sig på det nærmeste lineær-elastisk. I en bjælke som f.eks. vist i figur 4.1 vil normalspændingerne derfor variere lineært efter Navier's formel, og der vil i store dele



Figur 4.1

af bjælken optræde trækspændinger. Da uarmeret betons evne til at optage trækspændinger er særdeles ringe, vil en sådan bjælke kun kunne bære en ret lille last og betonens forholdsvis store trykstyrke vil slet ikke kunne udnyttes. Længe inden trykspændingerne når op i nærheden af trykstyrken, vil bjælken revne i træksiden. Er der tale om en statisk bestemt bjælke, som vist i figur 4.1, vil revnen løbe helt igennem bjælken, som så styrter ned.

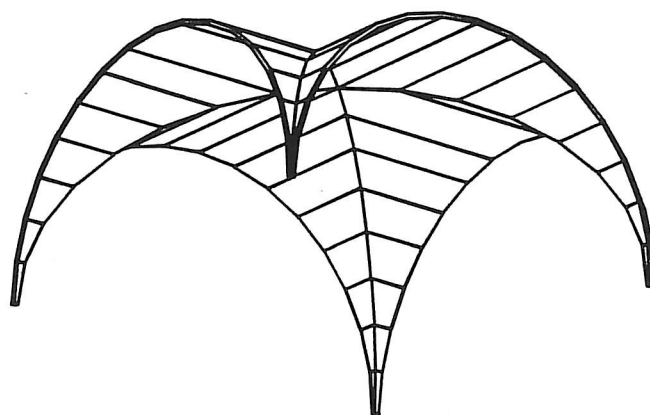
Hvis der kan etableres et horisontalt medhold, eventuelt som skitseret i figur 4.2, kan en revnet bjælke fungere som en tre-charnieres bue.



Figur 4.2

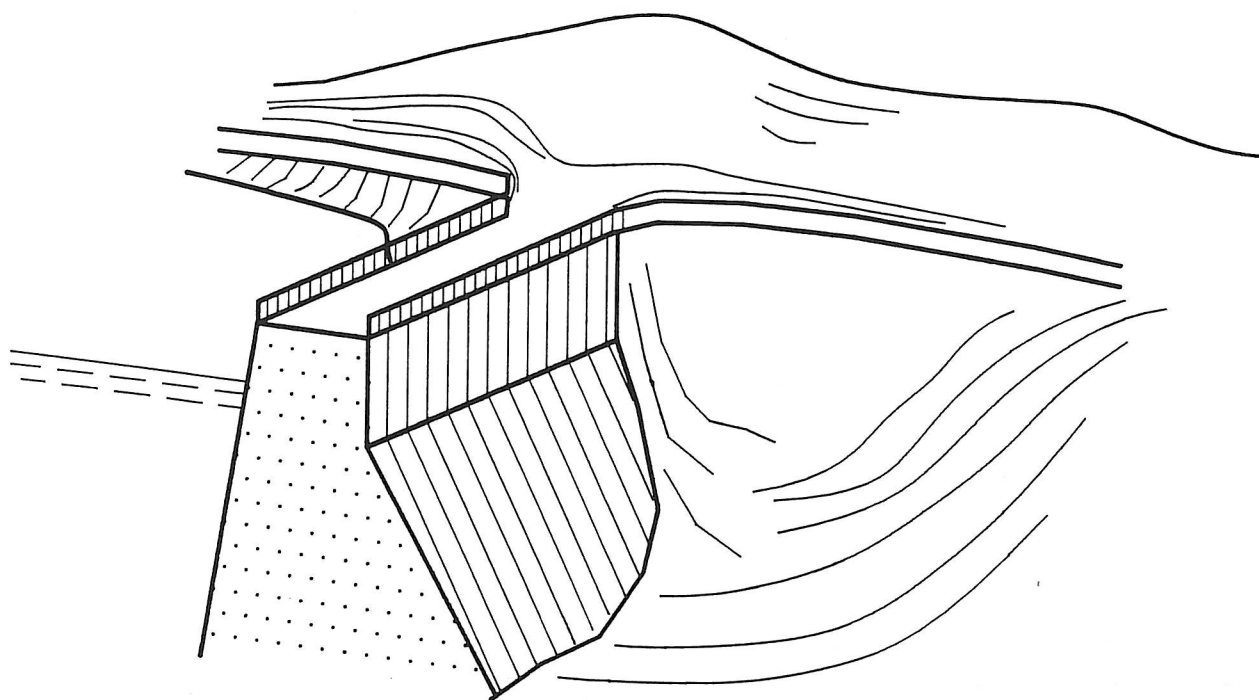
Sammen med den kendsgerning, at bjælkerne i de antikke bygværker er temmeligt høje, er dette forhold medvirkende til, at der stadig findes gamle templer i bl.a. Grækenland og Rom.

Vil man konstruere i uarmeret beton, murværk eller sten, må man undgå bjælker, dvs. konstruktioner der overfører kræfter som bøjning. Konstruktionerne må udformes og påvirkes på en måde, så der kun optræder trykspændinger. Eksempler er søjler og piller, buer, hvælvinger og kupler, se figur 4.3.



Figur 4.3

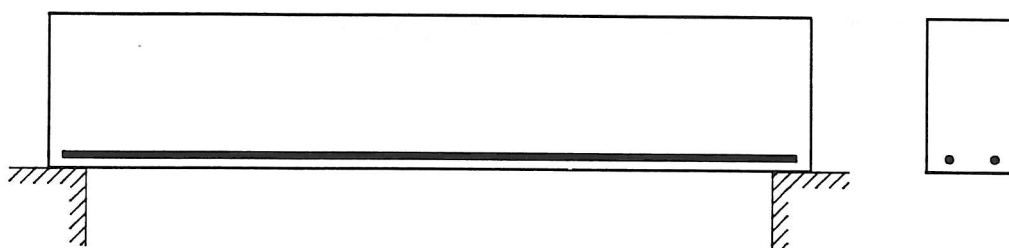
I stedet for omhyggeligt udformede konstruktioner kan man benytte massive konstruktioner, hvis egenvægt sikrer, at der ikke optræder trækspændinger. Eksempler herpå er støttemure og gravitationsdæmninger, se figur 4.4.



Figur 4.4

4.2 Bjælker med længdearmering.

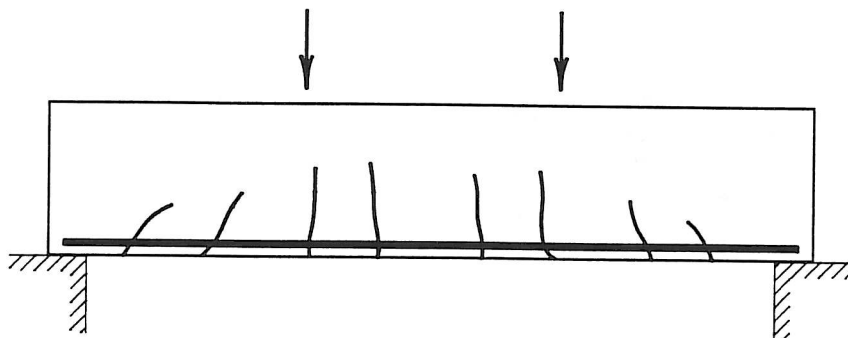
En udvej til at udnytte betonens trykstyrke i bjælker finder man ved at forsyne bjælken med længdearmering i form af stålstænger i træksiden, som vist i figur 4.5.



Figur 4.5

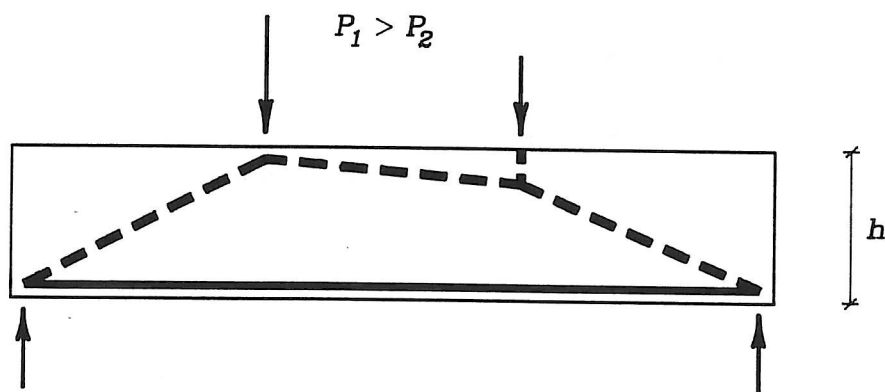
Ved små påvirkninger deformeres beton og armering ens, dvs. tøjningen i et punkt i en armeringsstang er den samme som i betonen umiddelbart ved siden af. Da begge materialer opfører sig nogenlunde lineær-elastisk ved disse påvirkninger er forholdet mellem spændingerne i dem lig med forholdet mellem deres elasticitetsmoduler.

Ved større, men stadig yderst moderate påvirkninger revner betonen, og armeringen må alene optage de trækkræfter, der er nødvendige for at ækvivalere det bøjende moment. Et eksempel på et revnebillede er vist i figur 4.6.



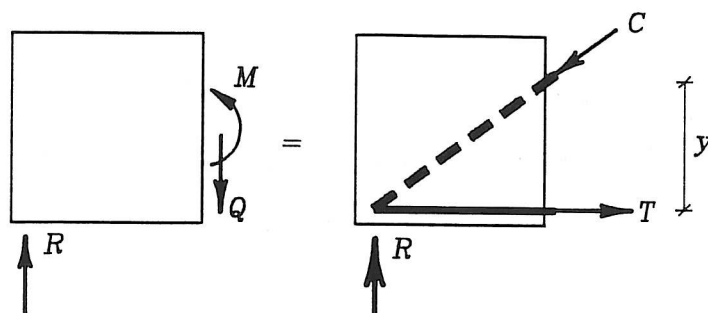
Figur 4.6

En "korrekt" beregning af revneudvikling i og bæreevne af en sådan bjælke er en særdeles kompliceret affære. Vi benytter derfor en regnemodel baseret på en forudsætning om, at betonen ikke kan optage træk, og at armeringen kun optager enakset træk. Påvirkningen af betonen bliver hermed enakset tryk. En betonbjælke med længdearmring kan således fungere som en trykbue med trækbånd, som vist i figur 4.7, hvor lasten



Figur 4.7

består af to enkeltkræfter. I figuren er trykstænger vist med punkteret streg og trækstænger med fuld streg. I de enkelte stænger er stangkraften konstant mellem knudepunkterne, specielt er trækkræften i armeringen konstant mellem understøtningerne. Betegnes denne trækkræfts størrelse med T , finder man ved hjælp af



Figur 4.8

figur 4.8, at trykstængernes placering i betonen bestemmes ved

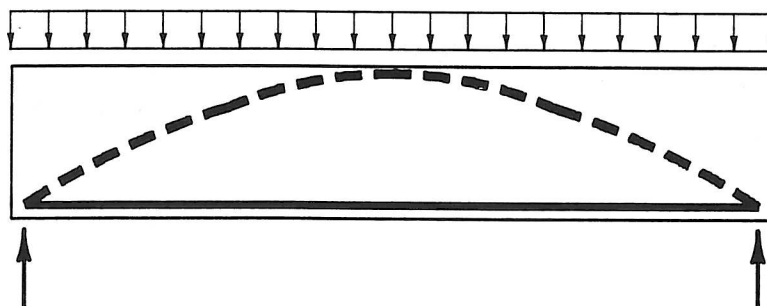
$$Ty = M \quad (4.1)$$

dvs. tryklinien er affin med momentkurven. Den mindste værdi af T , og dermed det mindste armeringsforbrug, finder man til at være

$$T = M_{max}/h \quad (4.2)$$

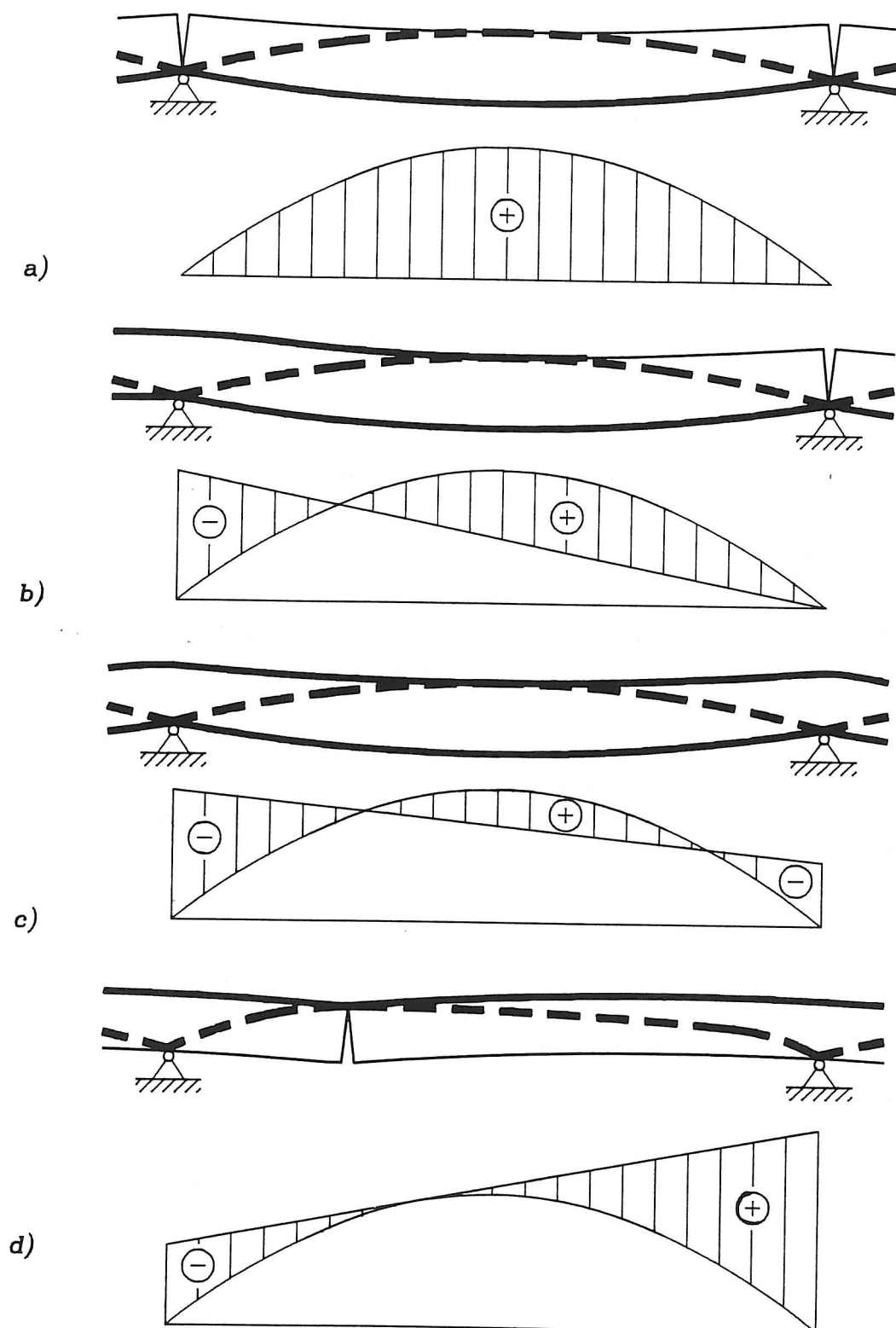
hvor h er den størst mulige afstand mellem træk- og trykresultant, der hvor momentet har maksimum. Størrelsen af trykkraften C bestemmes ved en ligevægtsligning.

Modellen kan benyttes, selvom lasten ikke består af enkeltkræfter, men af en kontinuerlig last. Ved kontinuerlig last bliver momentkurven en krum linie, der ikke er sammensat af rette liniestykker, som det er tilfældet, når lasten består af enkeltkræfter. Tilsvarende får man ikke retliniede trykstænger, men en krum trykbue. Et eksempel er vist i figur 4.9, hvor lasten er jævnt fordelt.



Figur 4.9

Momentkurven og dermed trykbuen er i dette tilfælde en andengrads parabel.



Figur 4.10

Et andet forhold skal bemærkes. I bjælker belastet af enkeltkræfter antages betonen udenfor trykstængerne at være spændingsfri. I bjælker med kontinuerlig last er betonen over trykbuen påvirket af lodrette trykspændinger.

For et mellemfag af en bjælke over flere fag viser figur 4.10 de samme tilfælde med hensyn til længdearmeringsarrangement, som i figur 3.12 er vist for en bjælke med både længdearmering og bøjlearmering. Momentkurverne er her vendt i forhold til figur 3.12 for at understrege affiniteten mellem momentkurve og trykbue.

Det er karakteristisk for betonbjælker armeret med længdearmering alene, at trækkræften er konstant mellem knudepunkterne. Dette medfører, at der i knudepunkter, bl.a. understøtninger, hvor der skal overføres kræfter mellem armering og beton, kan blive tale om ret store kræfter, når armeringen skal udnyttes i rimelig grad. Man må derfor sikre sig mod uvarslede forankringsbrud. Dette kan gøres ved enten at arbejde med små armeringsspændinger eller ved at forsyne bjælken med ret kostbare forankringsanordninger.

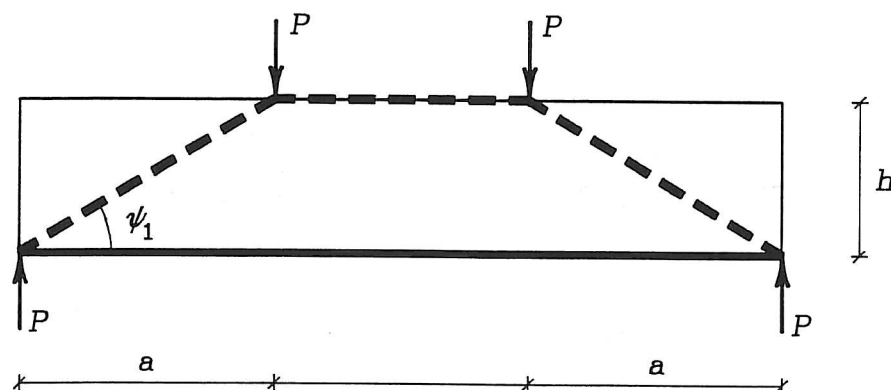
Forskydningskraften er den lodrette projektion af kraften i trykbuen. Da der for bjælker er tale om ret flade buer, vil der optræde temmelig store trykkræfter i buen.

4.3 Bjælker med længdearmering og tværarmering.

Der er i slutningen af afsnit 4.2 nævnt nogle ulemper ved betonbjælker armeret med længdearmering alene, nemlig konstant, stor trækraft mellem knudepunkterne og stor trykkræft i den flade trykbue. Begge disse forhold kan afhjælpes ved at forsyne bjælken med en tværarmering.

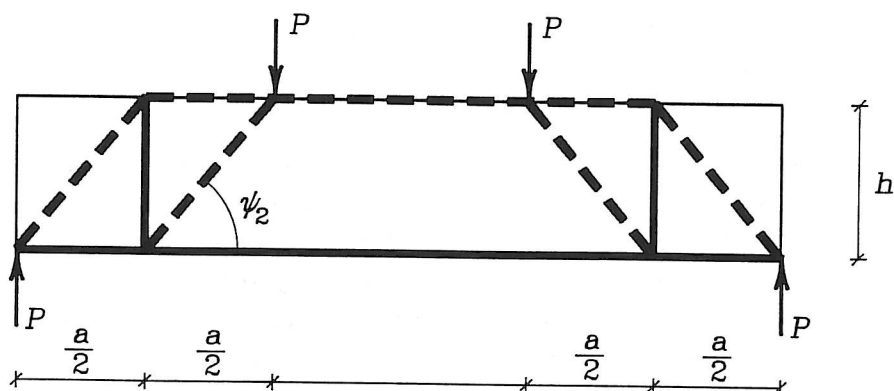
4.3.1 Bøjler.

En simpelt understøttet betonbjælke, armeret alene med længdearmering og belastet med to lige store, symmetrisk anbragte enkeltkræfter er vist i figur 4.11. Trækkræften i



Figur 4.11

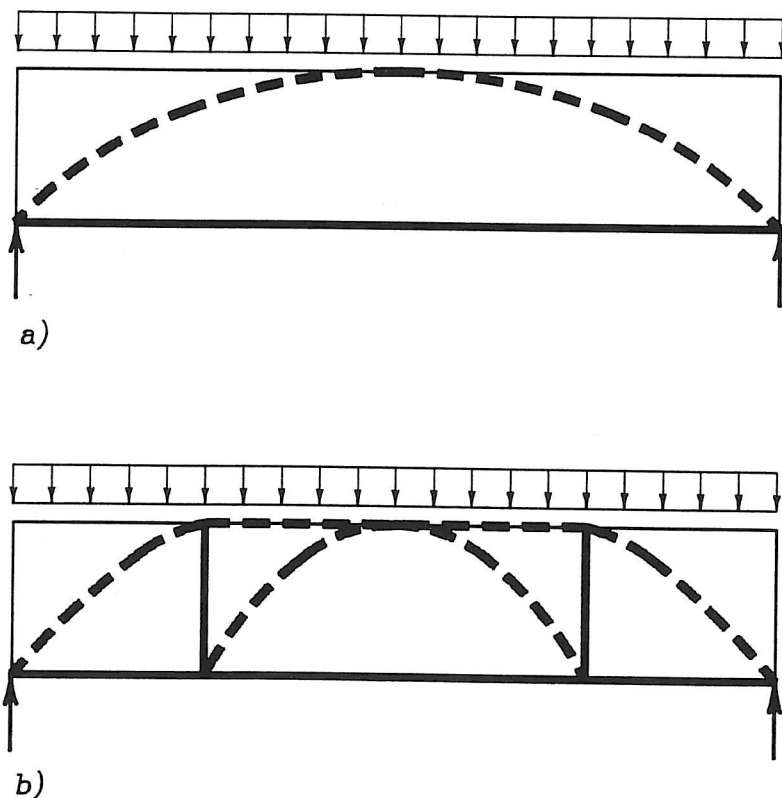
armeringen og trykkraften i den vandrette del af trykbuen er begge lig med $P \cot \psi_1$, og trykkraften i de skrå stringere er $P / \sin \psi_1$, hvor $\cot \psi_1 = a/h$. Hvis man forsyner bjælken med 2 bøjler, bliver systemet ændret, som vist i figur 4.12.



Figur 4.12

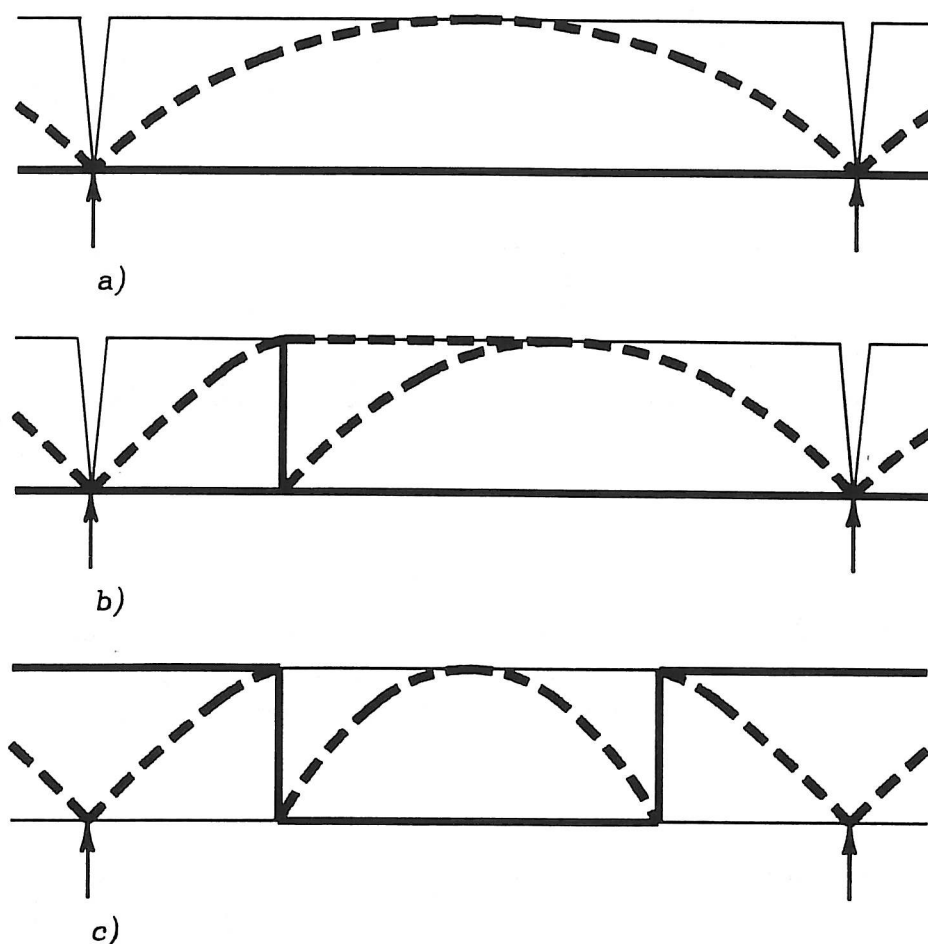
De maksimale kræfter midt på bjælken ændres ikke, men i de skrå stringere er trykkraften nu $P / \sin \psi_2$ og i trækstringeren ved understøtningen er kraften $P \cot \psi_2$, hvor $\cot \psi_2 = a/2h$. Der er altså tale om kraftige reduktioner af kræfterne. Prisen herfor er bøjlerne, de lodrette trækstringere, i dem er kraften P .

For en simpelt understøttet bjælke med jævnt fordelt last er de tilsvarende forhold vist i figur 4.13.



Figur 4.13

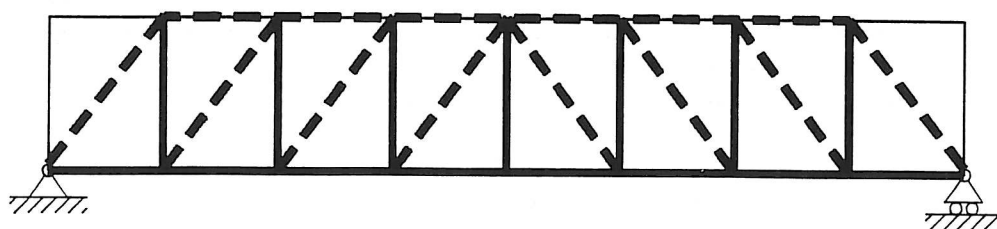
Er der mulighed for at etablere indspændinger som i kontinuerlige bjælker, kan man benytte systemer, som vist i figur 4.14. Man bemærker, at trækstringeren i oversiden af bjælken i figur 4.14 c erstatter både trækstringeren i undersiden ved understøtningen og den vandrette trykstringer i oversiden på midten af bjælken i figur 4.13 b.



Figur 4.14

Da man også kan benytte statisk ubestemte systemer, er der mange andre muligheder end skitseret ovenfor.

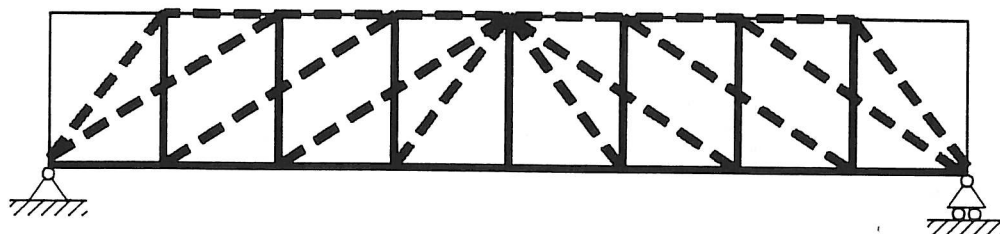
I stedet for at benytte nogle få bøjler i en bjælke, kan man forsyne den med mange bøjler. Herved bliver det muligt at betragte bjælken som en egentlig gitterbjælke, se figur 4.15.



Figur 4.15

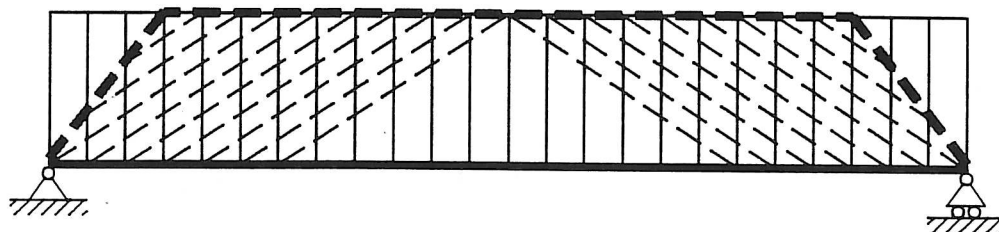
I gitterbjælken er trækraften i underflangen og trykkraften i overflangen proportionale med momentet, mens trækraften i vertikalerne og trykkraften i diagonalerne er proportionale med forskydningskraften. Hermed er opnået, at trækraften i længdearmeringen overføres til betonen i små portioner, dvs. ved hjælp af små trykkræfter.

For modellen i figur 4.15 gælder, at kraften i hver enkelt bøjle er lig med forskydningskraften det pågældende sted. Ved at ændre på diagonalernes hældning kan man imidlertid fordele forskydningskraften på 2 bøjler, som vist i figur 4.16, eller på



Figur 4.16

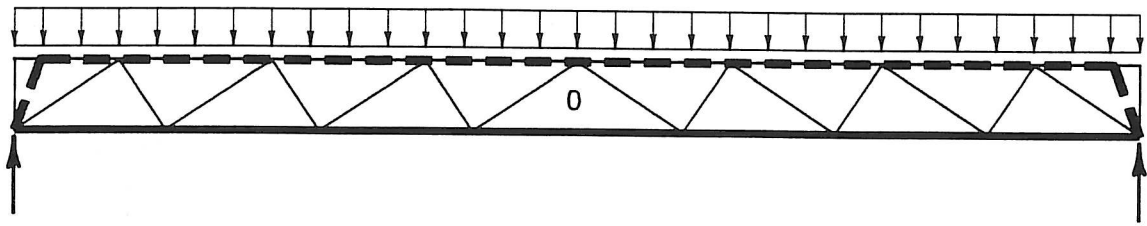
endnu flere bøjler. Betragtningen kan også anvendes på eksemplet i figur 4.12, hvor man kan tilføje trykstringere mellem understøtnings- og lastangrebspunkter. Med tætsiddende bøjler og diagonaler får man et system som i figur 4.17, det system som er behandlet i kapitlerne 2 og 3.



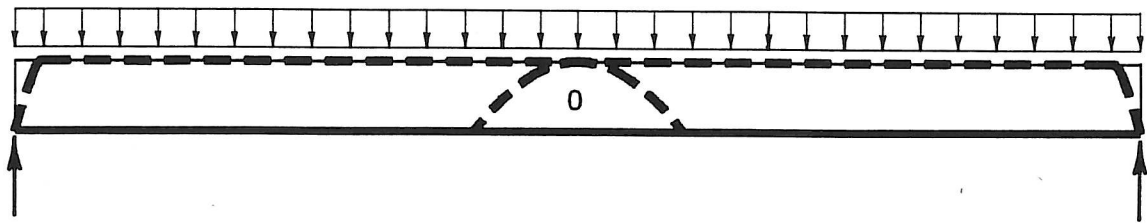
Figur 4.17

I modellen, som er beskrevet i ovennævnte kapitler, benyttes stykkevis konstante bøjlekræfter og betonspændinger i bjælkekroppen. En model som benytter kontinuert varierende bøjle- og betonspændinger i en bjælke med jævnt fordelt last på oversiden er angivet i [67.01], og det fuldstændige stringersystem er vist i [89.01].

De to modeller er sammenholdt i de følgende figurer. I figur 4.18 er det stringersystemerne, og i figur 4.19 bøjle- og betonspændingerne i bjælkekroppen som sammenholdes.



a) Stykkevis konstante bøjle- og betonspændinger.



b) Kontinuert varierende bøjle- og betonspændinger.

Figur 4.18. – Stringersystemer.

Langs bjælakens underside er bøjle- og betonspændingerne givet ved

$$\begin{aligned} \varphi t \sin^2 \beta b h (\cot \theta + \cot \beta) &= Q - \frac{1}{2} p h (\cot \theta - \cot \beta) \\ m \sin^2 \theta b h (\cot \theta + \cot \beta) &= -\left(Q - \frac{1}{2} p h (\cot \theta - \cot \beta)\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

i den kontinuerte model. Det fremgår af figur 4.19, at forskellen mellem spændingerne i de to modeller er ubetydelig.

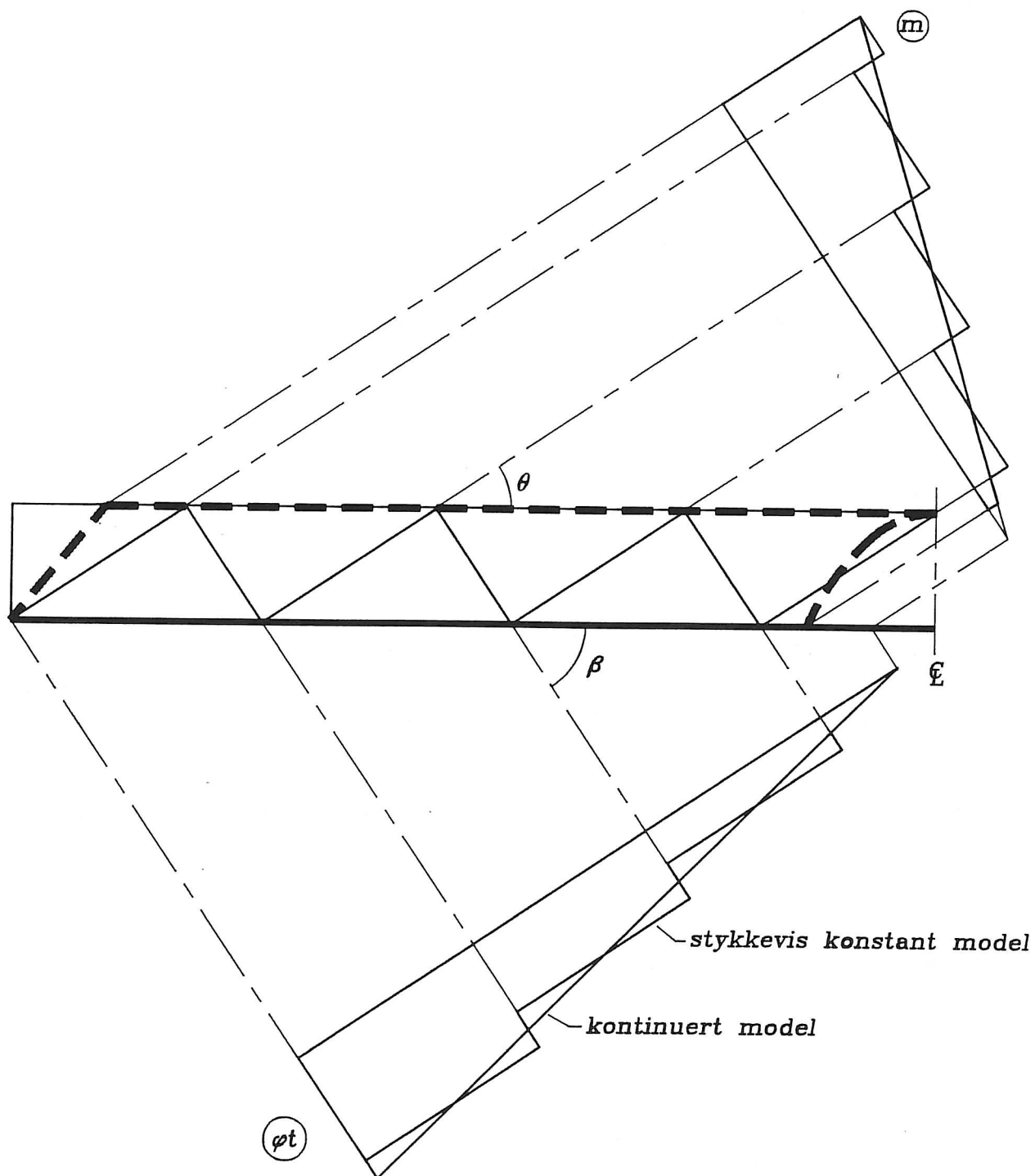
I de vandrette stringere bestemmes kræfterne af

$$\begin{aligned} Ch &= M - \frac{1}{2} Q h (\cot \theta - \cot \beta) - \frac{1}{12} p h^2 (\cot \theta + \cot \beta)^2 \\ Th &= M + \frac{1}{2} Q h (\cot \theta - \cot \beta) + \frac{1}{2} p h^2 \cot \theta \cot \beta - \frac{1}{12} p h^2 (\cot \theta + \cot \beta)^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

i den kontinuerte model. Disse kræfter afviger også kun ubetydeligt fra de tilsvarende kræfter i modellen med stykkevis konstante bøjle- og betonspændinger, jvf. figur 2.12.

Ligeledes er der heller ikke nævneværdig forskel mellem kræfterne i de skrå stringere ved understøtningerne i de to modeller.

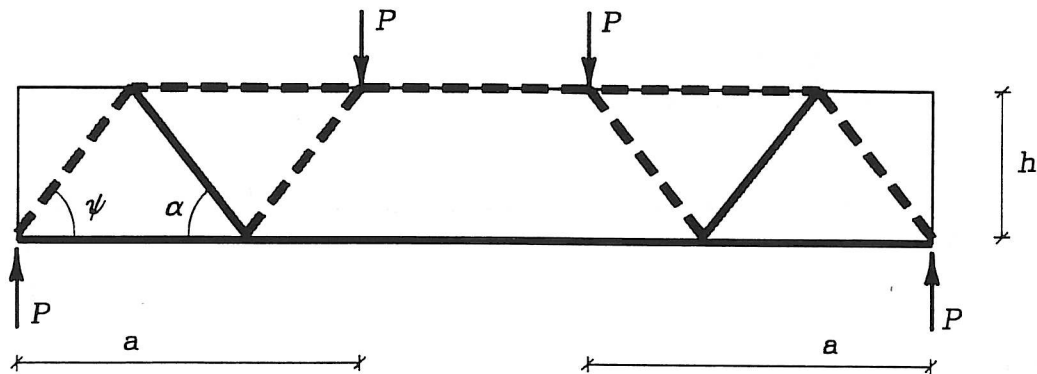
Med hensyn til den stringer der forekommer ved bjælkemidte i den kontinuerte model, og som er krum ligesom stringeren ved understøtningen, kan det anføres, at stringerkraften vokser fra nul ved bjælkens underside til $ph(\cot \theta + \cot \beta)^2/12$ i toppunktet. Dette er en lille kraft i forhold til de maksimale kræfter i de øvrige stringere.



Figur 4.19. – Bøjle- og betonspændinger.

4.3.2 Skråjern.

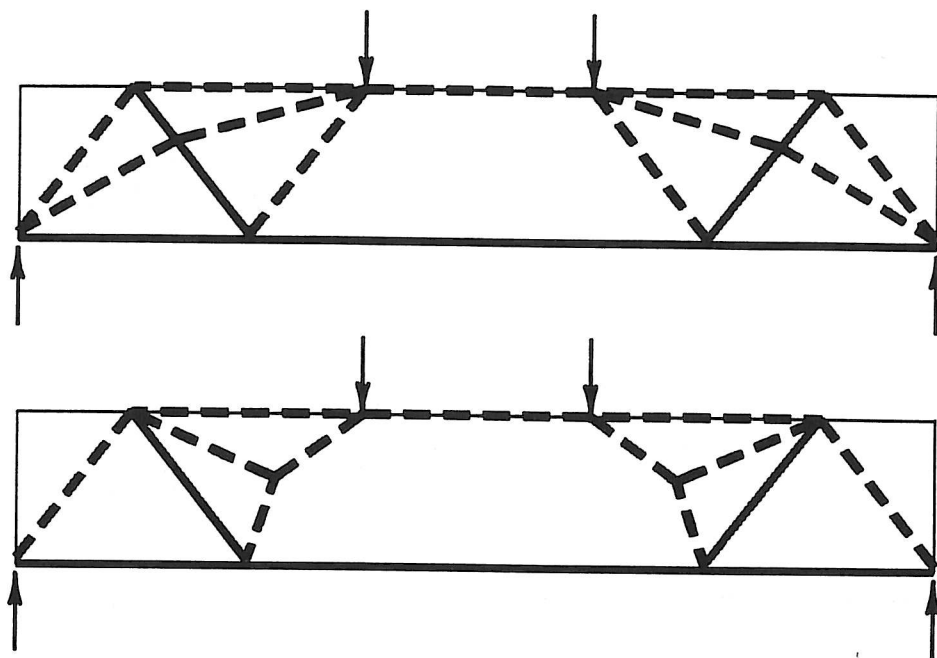
Hvis trækstringeren i undersiden af en simpelt understøttet bjælke består af adskillige armeringsstænger, kan man bøje en eller flere af disse stænger op fra undersiden til oversiden, se figur 4.20, i stedet for som i figur 4.12 at forsyne bjælken med nogle bøjler. Armeringsstangen, som kaldes et skråjern, kan undværes i undersiden, da trækkræften ved understøtningerne er mindre end midt på bjælken.



Figur 4.20

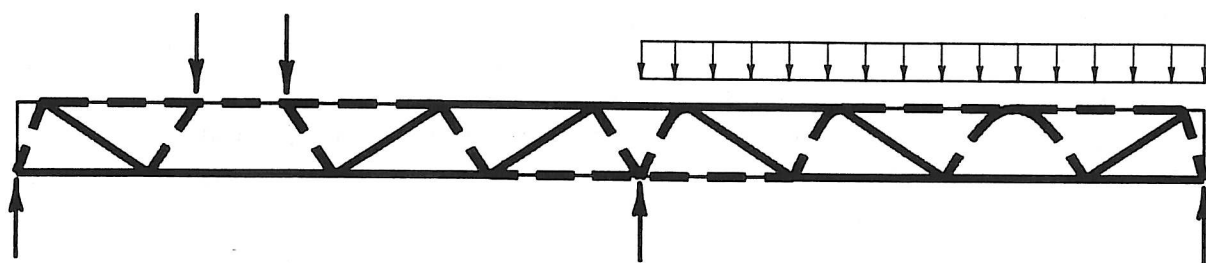
Med betegnelserne i figur 4.20 er trækkræften i skråjernet $S = P / \sin \alpha$ og ændringen i trækkræften i den vandrette stringer er $\Delta T = P(a/h - \cot \psi)$. De to kræfter S og ΔT er lige store, når man vælger α og ψ så $(a/h - \cot \psi) \sin \alpha = 1$, og man kan udnytte armeringen fuldt ud i skråjernet, og på de to strækninger i undersiden af bjælken. Er S mindre end ΔT , kan man ikke udnytte skråjernet fuldt ud og er S større end ΔT , kan man ikke udnytte armeringen midt på bjælken.

Overvejelser som ovenstående har forårsaget en del forvirring med hensyn til virkningen af skråjern, hovedsageligt fordi overvejelserne er en sammenblanding af på den ene side bestemmelse af stringerkræfter og på den anden side dimensionering af armeringsmængde. Det forhold, at man kan benytte statisk ubestemte modeller, som vist med nogle eksempler i figur 4.21, har ikke bidraget til at skabe større klarhed. Da en højtliggende trykstringer svarer til små kræfter i trækstringeren, er modeller med trykstringer i oversiden mest økonomiske.



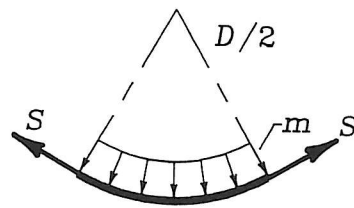
Figur 4.21

Skråjern er især fordelagtige i kontinuerte bjælker, se figur 4.22, idet de samme armeringsstænger kan benyttes i både under- og overside af bjælken.



Figur 4.22

Anvendelse af skråjern eller enkelte bøjler har en ulempe i forhold til anvendelse af tætsiddende bøjler. Ulempen stammer fra det forhold, som også er nævnt i forbindelse med anvendelse af længdearmering alene: at der skal overføres ret store kræfter mellem armering og beton i knudepunkterne. Bukkes et skråjern med diameter d over en bukkediameter D finder man ved hjælp af figur 4.23, at betonspæn-



Figur 4.23

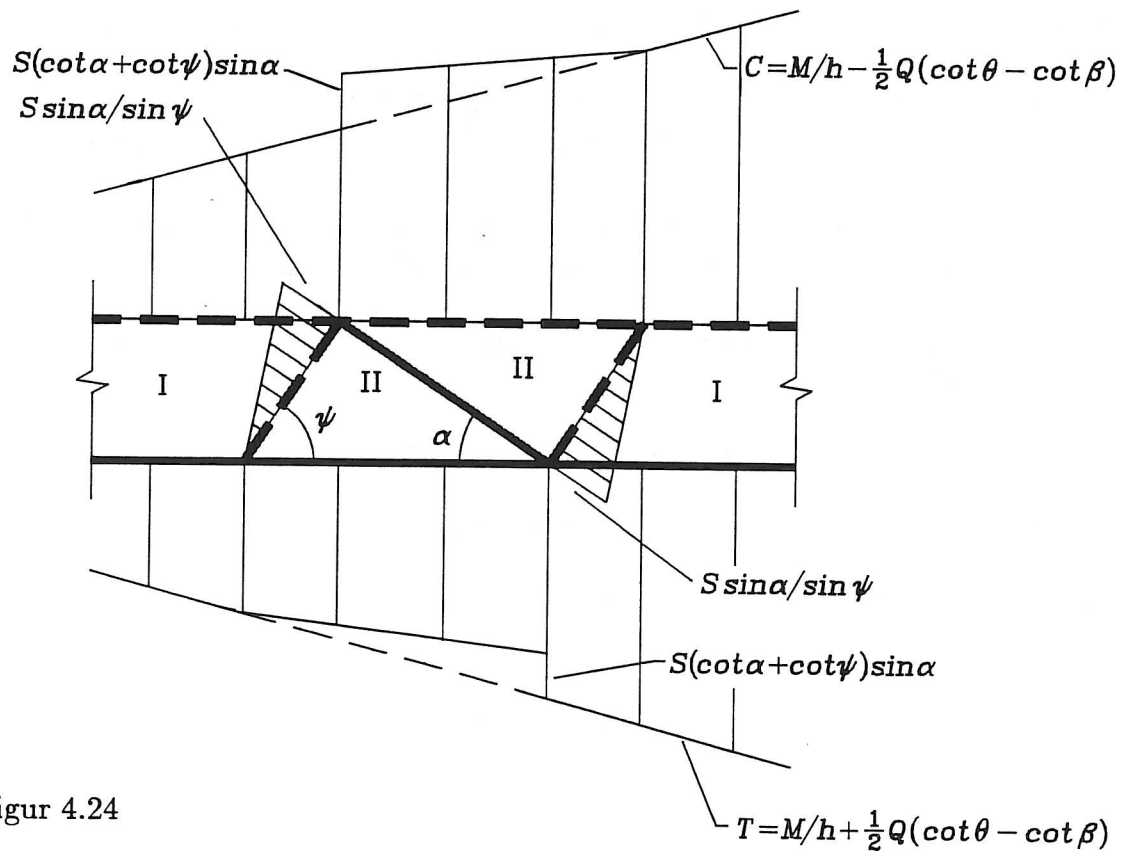
dingerne i denne situation bestemmes af

$$mdD = 2S \quad (4.5)$$

Dette vil med en rimelig udnyttelse af skråjernet betyde store betonspændinger.

4.3.3 Bøjler og skråjern.

Skråjern kan benyttes i bjælker med længdearmering alene eller i bjælker med længdearmering og enkelte bøjler. De kan også benyttes i bjælker med tætsiddende bøjler, og figur 4.24 viser et eksempel, hvor et skråjern er anbragt under vinklen α i en forskydningszone med konstant forskydningskraft Q .



Figur 4.24

Kraften S i skråjerne er konstant fra undersiden af bjælken til oversiden. Komposit-spændingerne er, se (2.23)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -Q^*(\cot \theta - \cot \beta)/bh \\ \sigma_{yy} &= 0 \\ \sigma_{xy} &= -Q^*/bh\end{aligned}\tag{4.6}$$

hvor

$$\begin{aligned}Q^* &= Q \text{ i område I} \\ Q^* &= Q - S \sin \alpha \text{ i område II}\end{aligned}\tag{4.7}$$

Ligesom kompositspændingerne bestemmes også bøjle- og betonspændinger i områderne I og II af Q^* i henhold til (2.11) og (2.12).

Trykkrafterne i de viste skrå stringere varierer lineært mellem nul og $S \sin \alpha / \sin \psi$, hvor $\cot \psi = \frac{1}{2}(\cot \theta - \cot \beta)$. Også ændringerne af kræfterne i de vandrette stringere i bjælkens overside og underside er vist i figuren.

4.3.4 Litteraturhenvisninger.

Gitterteorien, som er behandlet af bl.a. Suenson (1931), blev benyttet omkring 1900 af Ritter og Mörsch. Johansen (1928) videreudviklede teorien i den såkaldte bueteori, den er beskrevet af bl.a. Poulsen (1960) og Nielsen (1975). Anvendelse af kontinuerte bøjlespændinger i stedet for diskrete bøjlekræfter blev indført af Nielsen (1967).

Johansen, K. W.: Om Virkningen af Bøjler og Skraajærn i Jærnbetonbjælker, Danmarks Naturvidenskabelige Samfund, A. Nr. 17, København 1928.

Nielsen, M. P.: Om Forskydningsarmering af Jærnbetonbjælker, Bygningsstatistiske Meddelelser, Vol 38, 33-58, 1967.

Nielsen, M. P.: Beton 1, del 3, Aalborg/København, 1975.

Poulsen, E.: Betonkonstruktioner, Bind 1. København 1960.

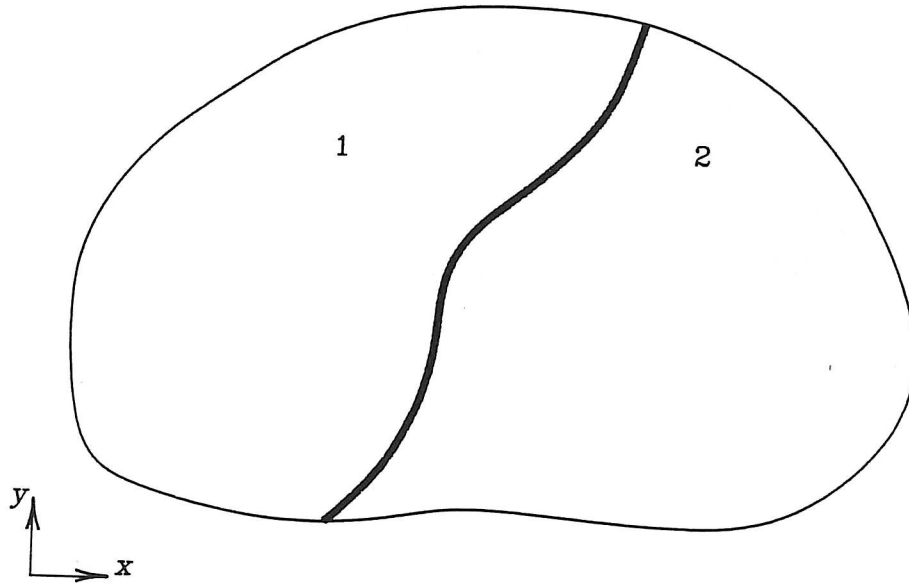
Rathkjen, A.: Stress Fields in Beams of Reinforced Materials, Instituttet for Bygningsteknik, AUC, R8918, 1989.

Suenson, E.: Jærnbeton, 4. udg., København 1931.

APPENDIX A

DISKONTINUITETER I PLANE SPÆNDINGSFELTER.

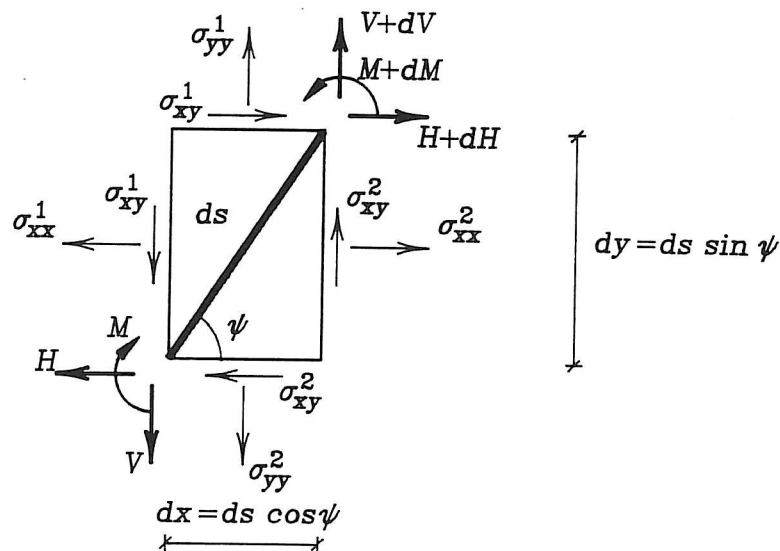
En skive er som vist i figur A1 delt i to områder af en plankrum bjælke.



Figur A1

Spændingerne i de to områder betegnes $\sigma_{xx}^1, \sigma_{yy}^1, \sigma_{xy}^1$ henholdsvis $\sigma_{xx}^2, \sigma_{yy}^2$ og σ_{xy}^2 .

Snitkræfterne i bjælken betegnes H efter x -retningen, V efter y -retningen og M for momentet. Betragtes ligevægten af elementet i figur A2, finder man



Figur A2

$$\begin{aligned}
dH &= (\sigma_{xx}^1 - \sigma_{xx}^2)dy - (\sigma_{xy}^1 - \sigma_{xy}^2)dx \\
dV &= -(\sigma_{yy}^1 - \sigma_{yy}^2)dx + (\sigma_{xy}^1 - \sigma_{xy}^2)dy \\
dM &= Hdy - Vdx
\end{aligned} \tag{A1}$$

Indføres spændingsfunktionerne φ^1 og φ^2 bliver

$$\begin{aligned}
dH &= \left(\frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial y^2} \right) dy + \left(\frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial x \partial y} \right) dx \\
dV &= - \left(\frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial x^2} \right) dx + \left(\frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi^2}{\partial x \partial y} \right) dy
\end{aligned} \tag{A2}$$

Med differensfunktionen

$$\varphi = \varphi^1 - \varphi^2 \tag{A3}$$

finder man

$$\begin{aligned}
dH &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dx = d \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
dV &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} dy = -d \frac{\partial \varphi}{\partial x}
\end{aligned} \tag{A4}$$

og hermed

$$\begin{aligned}
H &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + B \\
V &= - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - A
\end{aligned} \tag{A5}$$

samt

$$\begin{aligned}
dM &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + B \right) dy + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + A \right) dx \\
&= d\varphi + A dx + B dy
\end{aligned} \tag{A6}$$

eller

$$M = \varphi + Ax + By + C \tag{A7}$$

hvor A, B og C er arbitrære konstanter.

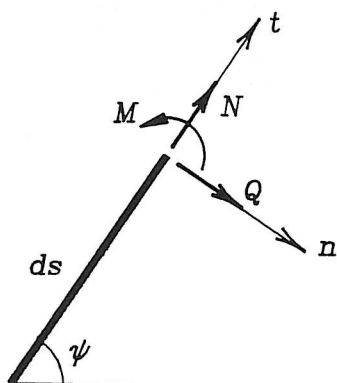
Sætter man

$$U = \varphi + Ax + By + C \quad (A8)$$

har man således

$$\begin{aligned} H &= \partial U / \partial y \\ V &= -\partial U / \partial x \\ M &= U \end{aligned} \quad (A9)$$

I et cartesisk n, t -system, som lokalt falder sammen med normalen og tangenten til bjælkens systemlinie, se figur A3, har man



Figur A3

$$\begin{aligned} N &= -\partial U / \partial n \\ Q &= -\partial U / \partial t \\ M &= U \end{aligned} \quad (A10)$$

I n, t -systemet er

$$\begin{aligned} dN &= (\sigma_{nt}^1 - \sigma_{nt}^2) ds \\ dQ &= (\sigma_{nn}^1 - \sigma_{nn}^2) ds \end{aligned} \quad (A11)$$

hvoraf det fremgår, at normalspændingerne i tangentretningen, σ_{tt}^1 og σ_{tt}^2 , ikke har nogen indflydelse på størrelsen af N og Q og dermed heller ikke på H og V , idet

$$\begin{aligned} H &= N \cos \psi + Q \sin \psi \\ V &= N \sin \psi - Q \cos \psi \end{aligned} \quad (A12)$$

Nogle specialtilfælde skal omtales:

- a) Aksialt påvirket stringer med $M = 0$. Af (A9) og (A10) fremgår, at stringerens form er givet ved $U = 0$ og dermed bliver også $Q = 0$. Hældningen af stringeren bliver $\tan\psi = dy/dx = V/H$. Normalkraften betegnes stringerkraften S og kan bestemmes af $S^2 = H^2 + V^2$.
- b) Spændingsdiskontinuitetslinie $N = Q = M = 0$. Af (A11) fremgår, at man foruden $M = U = 0$, må forlange $\sigma_{nn}^1 = \sigma_{nn}^2$ og $\sigma_{nt}^1 = \sigma_{nt}^2$, mens der ikke stilles krav til σ_{tt}^1 og σ_{tt}^2 .
- c) Konstante spændinger i områderne 1 og 2 medfører, at U får formen $\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}by^2 - cxy + Ax + By + C$, hvor også a, b og c er konstanter. En momentfri stringer skal derfor have form som et keglesnit.
- d) Konstante spændinger forskellige fra nul på den ene side stringeren og lig med nul på den anden er behandlet af E. H. Mansfield: Neutral Holes in Plane Sheet – Reinforced Holes which are Elastically Equivalent to the Uncut Sheet, Quart. J. Mech. Appl. Math., 6, 370-378, 1953. Konstante spændinger lig med nul på begge sider af stringeren er behandlet af J. Nielsen: Kræfter i gitterflader, Nordisk Betong, 8, 465-484, 1964.

